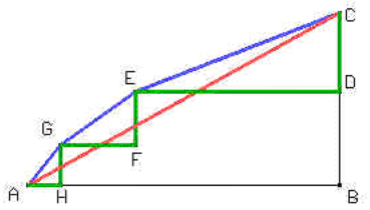
Curso 2010-11

Problema 104. *Resolver el siguiente sistema de ecuaciones, donde x, y, z son reales positivos:*

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 8 \\ \sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+4} + \sqrt{z^2+9} = 10 \end{array} \right.$$

En la siguiente figura, CDE, EFG, GHA y ABC son triángulos rectángulos tales que

- $GH = 1$ y $AH = x$
- $EF = 2$ y $GF = y$
- $CD = 3$ y $ED = z$



Entonces $BC = 6$ y $AB = x + y + z = 8$. Por el teorema de Pitágoras en ABC sabemos que $AC = 10$.

Utilizando Pitágoras en los demás triángulos rectángulos tenemos que

$$GA = \sqrt{x^2 + 1}, \qquad GE = \sqrt{y^2 + 4}, \qquad EC = \sqrt{z^2 + 9}.$$

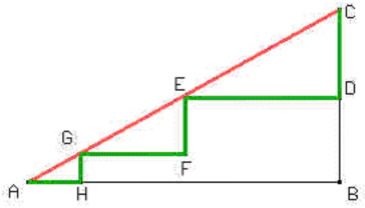
Entonces

$$GA + GE + EC = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 4} + \sqrt{z^2 + 9} = 10 = AC,$$

mientras que por otro lado, usando la desigualdad triangular, debe ser

$$GA + GE \geq AE, \qquad EA + EC \geq AC, \qquad GA + GE + EC \geq AC;$$

como aquí se da la igualdad, se dan todas las igualdades en las inecuaciones anteriores y los puntos A, G, E y C están alineados.



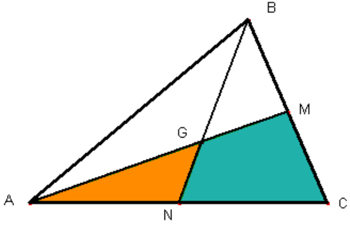
Lo que resta es simple: los cuatro triángulos rectángulos son semejantes, por lo que

$$AB/BC = 8/6 = z/3 = y/2 = x/1.$$

Despejando, $x = 4/3$, $y = 8/3$, $z = 4$.

Problema 105. *Se da el triángulo ABC y se trazan las medianas AM y BN, que se cortan en G. Calcular el área del cuadrilátero $GMCN$ en función del área de ABC.*

Problema 105. *Se da el triángulo ABC y se trazan las medianas AM y BN, que se cortan en G. Calcular el área del cuadrilátero $GMCN$ en función del área de ABC.*



Si designamos por s el área del triángulo ABC, el área del triángulo ABN es $\frac{1}{2}s$.
El área del triángulo ANG es $\frac{1}{3}\frac{1}{2}s = \frac{1}{6}s$
El área del cuadrilátero $CMGN$ es $\frac{1}{2}s - \frac{1}{6}s = \frac{1}{3}s$

Problema 106. *Encuentra un número de cuatro cifras que verifique las siguientes condiciones:*

1. *La suma de los cuadrados de las cifras de las centenas y de las unidades es igual a 53.*
2. *La suma de los cuadrados de las otras dos cifras es igual a 45.*
3. *Si del número requerido restamos el que se obtiene al invertir las cifras, resulta un múltiplo de 99 comprendido entre 1000 y 1200.*

Problema 106. *Encuentra un número de cuatro cifras que verifique las siguientes condiciones:*

1. *La suma de los cuadrados de las cifras de las centenas y de las unidades es igual a 53.*
2. *La suma de los cuadrados de las otras dos cifras es igual a 45.*
3. *Si del número requerido restamos el que se obtiene al invertir las cifras, resulta un múltiplo de 99 comprendido entre 1000 y 1200.*

$$\underline{abcd} - \underline{dcba} = 1000(a-d) + 100(b-c) + 10(c-b) + d - a =$$

$$= 999(a-d) + 90(b-c) = \dot{99}$$

$$\left\lfloor \frac{1200}{99} \right\rfloor = 12, \qquad \left\lceil \frac{1000}{99} \right\rceil = 11$$

Tenemos dos casos:

Caso 1.

$$\left.\begin{array}{rcl} 111(a-d)+10(b-c) & = & 121 \\ b^2+d^2 & = & 53 \\ a^2+c^2 & = & =45 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{rcl} a-d & = & 1 \\ b-c & = & 1 \\ b^2+d^2 & = & 53 \\ a^2+c^2 & = & =45 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} a & = & d+1 \\ b & = & c+1 \\ c^2+2c+1+d^2 & = & 53 \\ d^2+2d+1+c^2 & = & =45 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{rcl} a & = & d+1 \\ b & = & c+1 \\ c^2+2c+d^2 & = & 52 \\ d^2+2d+c^2 & = & =44 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} a & = & d+1 \\ b & = & c+1 \\ 2(c-d) & = & 8 \\ 2c^2+2d^2+2c+2d & = & =96 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} a & = & d+1 \\ b & = & c+1 \\ c & = & d+4 \\ d^2+8d+16+d^2+d+4+d & = & =48 \end{array}\right\}$$

$$2d^2+10d-28=0$$

$$d=\frac{-5\pm\sqrt{25+56}}{2}=\left\langle\begin{array}{c} 2 \\ -7 \end{array}\right.$$

$$d=2,\ c=6,\ a=3,\ c=7$$

Caso 2.

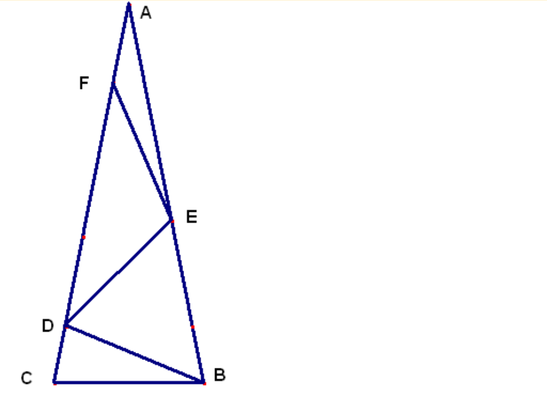
$$\left.\begin{array}{rcl} 111(a-d)+10(b-c) & = & 132 \\ b^2+d^2 & = & 53 \\ a^2+c^2 & = & =45 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{rcl} a-d & = & 1 \\ b-c & = & 2 \\ b^2+d^2 & = & 53 \\ a^2+c^2 & = & =45 \end{array}\right\}$$

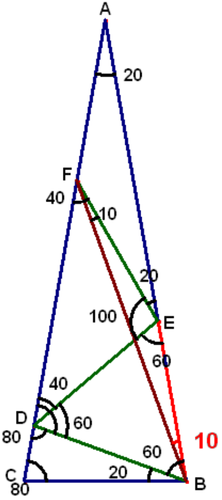
$$\left.\begin{array}{rcl} a & = & d+1 \\ b & = & c+2 \\ c^2+4c+4+d^2 & = & 53 \\ d^2+2d+1+c^2 & = & =45 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{rcl} a & = & d+1 \\ b & = & c+2 \\ c^2+4c+d^2 & = & 49 \\ d^2+2d+c^2 & = & =44 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} a & = & d+1 \\ b & = & c+1 \\ 2(2c-d) & = & 5 \\ 2c^2+2d^2+4c+2d & = & =93 \end{array}\right\}$$

La tercera ecuación imposibilita que el sistema tenga soluciones enteras.

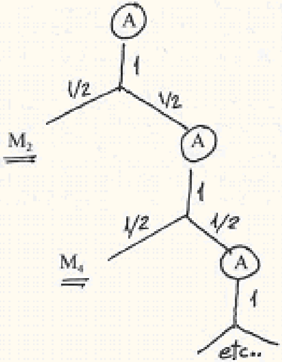
Problema 107. *En la figura, el triángulo ABC es isósceles y el ángulo* $A = 20^\circ$. *Además,* $CB = BD = DE = EF$. *Calcular el valor del ángulo FBA (no señalado en la figura).*




A
20
F
40
10
20
100
E
60
40
D
60
80
10
60
C
20
B
80

Problema 108. *Una hormiga que parte del vértice* A *de un cuadrado* $ABCD$ *se mueve aleatoriamente a lo largo de los lados del cuadrado. Al llegar a cada vértice decide al azar si avanza o retrocede. Sus andanzas terminarán si llega al vértice* C *opuesto al* A*, donde, inmóvil, acecha una voraz araña. ¿Cuál es, por término medio, el número de lados que va a recorrer la hormiga antes de ser devorada?*

Da lugar a un diagrama de árbol infinito, que empieza así:



Observamos que la hormiga es devorada tras un número par de movimientos. Si designamos por $p(M_{2n})$ a la probabilidad de que muera tras $2n$ movimientos, se tiene

$$p(M_2) = 1/2; \quad p(M_4) = 1/4; \quad p(M_6) = 1/8; \quad \ldots \quad p(M_{2n}) = 1/2^n;$$

por lo tanto la esperanza del número de movimientos es

$$\begin{aligned} \overline{X} &= 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 6 \cdot \frac{1}{8} + 8 \cdot \frac{1}{16} + \ldots \\ &= 2 \left(\frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2^2} + 3 \cdot \frac{1}{2^3} + 4 \cdot \frac{1}{2^4} + \ldots \right). \end{aligned}$$

Queda una serie aritmético-geométrica que puede sumarse usando simples conocimientos de progresiones geométricas.

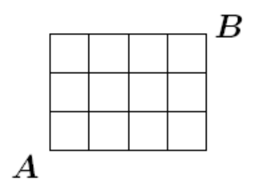
Dispongamos la suma de otra forma:

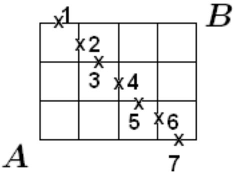
$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots &= 1 \\
+ \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots &= \frac{1}{2} \\
+ \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots &= \frac{1}{4} \\
+ \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots &= \frac{1}{8} \\
+ \frac{1}{32} + \ldots &= \frac{1}{16} \\
\ldots\ldots &
\end{aligned}$$

Cada fila es la suma de una serie geométrica de razón $1/2$, y hemos puesto a la derecha, usando la fórmula $S = \frac{a_1}{1-r} = 2a_1$, la suma de cada fila.

Ahora bastará con sumar la columna de las sumas de la derecha, que es a su vez una serie geométrica de razón $1/2$. La suma total es, por tanto, igual a 2. Luego $\overline{X} = 4$: la vida media de la hormiga es de **cuatro movimientos**.

Problema 109. *La figura muestra un plano con calles que delimitan 12 manzanas cuadradas.*
Una persona P va desde A hasta B y otra Q desde B hasta A.
Ambas parten a la vez siguiendo caminos de longitud mínima con la misma velocidad constante.
En cada punto con más de un camino todos los posibles caminos son igualmente probables.
Halla la probabilidad de que se crucen.



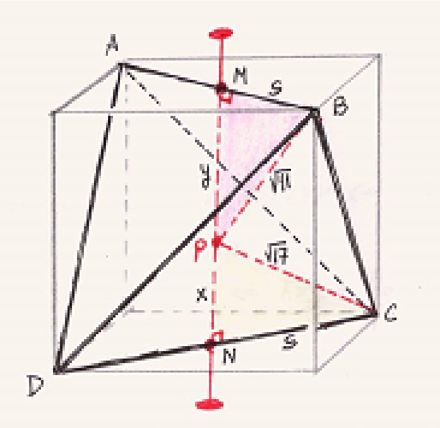


$$P(1) = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{16}$$
$$P(2) = \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{16}$$
$$P(3) = \frac{3}{16} \cdot \frac{3}{16}$$
$$P(4) = \frac{3}{16} \cdot \frac{3}{16}$$
$$P(5) = \frac{3}{16} \cdot \frac{3}{16}$$
$$P(6) = \frac{1}{16} \cdot \frac{3}{16}$$
$$P(7) = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{8}$$

$$\frac{2+3+9+9+9+3+2}{256} = \frac{37}{256}$$

Problema 110. *Sea P un punto interior a un tetraedro regular $ABCD$ tal que $PA = PB = \sqrt{11}$ y $PC = PD = \sqrt{17}$. Calcula la arista del tetraedro. (Problema propuesto en http://www.usamts.org)*

Problema 110. *Sea P un punto interior a un tetraedro regular $ABCD$ tal que $PA = PB = \sqrt{11}$ y $PC = PD = \sqrt{17}$. Calcula la arista del tetraedro. (Problema propuesto en http://www.usamts.org)*



Imaginemos el tetraedro inscrito en un cubo (o simplemente apoyado en una arista). El punto P pertenece a los planos mediadores de AB y CD, por lo que tiene que pertenecer al eje binario de simetría MN, que es la perpendicular común a las aristas AB y CD, es decir, la recta que une los puntos medios M y N de AB y CD.
Si llamamos s a la semiarista del tetraedro, la distancia MN es la arista del cubo cuyas caras tienen $2s$ como diagonal, es decir, $MN = s\sqrt{2}$.
Los triángulos PMB y PNC son rectángulos.
Llamando $x = PN$, $y = PM$, tenemos que resolver el sistema

$$\begin{cases} x^2 + s^2 = 17 \\ y^2 + s^2 = 11 \\ x + y = s\sqrt{2} \end{cases}$$

Eliminando x, y queda la ecuación

$$\sqrt{17 - s^2} + \sqrt{11-^2} = s\sqrt{2},$$

de donde, operando como es usual, se llega a la ecuación bicuadrada

$$3s^4 - 28s^2 + 9 = 0,$$

de soluciones positivas $s_1 = 3$ y $s_2 = \sqrt{3}/3$. Con la segunda solución, la arista sería $2\sqrt{3}/3 < \sqrt{11}$, que desechamos (pues la arista debería ser mayor que PB y PC). Con la primera, la arista del tetraedro mide 6.