Curso 2010-11

Problema 98. *Dos chicos juegan a partir una tableta de chocolate de $m \times n$ pastillas. Cada uno de ellos parte la tableta por alguna de las líneas marcadas. Pierde el que no pueda partir. ¿Quién ganará, el chico que parte primero o el que parte segundo?*

Problema 98. *Dos chicos juegan a partir una tableta de chocolate de $m \times n$ pastillas. Cada uno de ellos parte la tableta por alguna de las líneas marcadas. Pierde el que no pueda partir. ¿Quién ganará, el chico que parte primero o el que parte segundo?*

En cada partición el número de trozos aumenta en 1, el que parte primero empieza en 1, y siempre parte habiendo un número impar antes de partir el y dejando un número par.
Gana el primero si $m \times n$ es par.
Gana el segundo si $m \times n$ es impar.

Problema 99. *Sea el trinomio*
$P(x) = x^2 - (8a-2)x + 15a^2 - 2a - 7.$

1. *Hallar el valor entero de* a *para el cual el trinomio es positivo para cualquier valor de* x.
2. *Hallar el valor entero de* a *para el cual la suma de los cuadrados de las raíces de la ecuación* $P(x) = 0$ *es 24.*

Problema 99. *Sea el trinomio*
$P(x) = x^2 - (8a - 2)x + 15a^2 - 2a - 7.$

1. *Hallar el valor entero de a para el cual el trinomio es positivo para cualquier valor de x.*
2. *Hallar el valor entero de a para el cual la suma de los cuadrados de las raíces de la ecuación $P(x) = 0$ es 24.*

1. El discriminante es

$$(4a - 1)^2 - 15a^2 + 2a + 7 = 0$$

$$16a^2 - 8a + 1 - 15a^2 + 2a + 7 = 0$$

$$a^2 - 6a + 8 = 0$$

$$a = 3 \pm 1$$

Para que a sea entero y el discriminante negativo debe ser $a = 3$.

2.

$$
\begin{aligned}
x_1^2 + x_2^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 \\
x_1^2 + x_2^2 &= (8a-2)^2 - 2(15a^2 - 2a - 7) = 24 \\
& 64a^2 - 32a + 4 - 30a^2 + 4a + 14 = 24 \\
& 34a^2 - 28a - 6 = 0 \\
& 17a^2 - 14a - 3 = 0 \\
& a = \frac{7 \pm \sqrt{49+51}}{17} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{3}{17} \end{cases}
\end{aligned}
$$

El valor entero es $a = 1$.

Problema 100. *[Olimpiada Matemática Española, 1994] Sean n, k enteros positivos, $k < n$. Planteamos el siguiente juego de azar: En un saco tenemos $2n$ bolas, n blancas, y n negras. Sacamos las bolas de una en una. Si en algún momento hay fuera de la bolsa k bolas blancas más que bolas negras, perdemos. En otro caso ganamos. Calculad la probabilidad que tenemos de ganar el juego.*

Problema 100. *[Olimpiada Matemática Española, 1994] Sean n, k enteros positivos, $k < n$. Planteamos el siguiente juego de azar: En un saco tenemos 2n bolas, n blancas, y n negras. Sacamos las bolas de una en una. Si en algún momento hay fuera de la bolsa k bolas blancas más que bolas negras, perdemos. En otro caso ganamos. Calculad la probabilidad que tenemos de ganar el juego.*

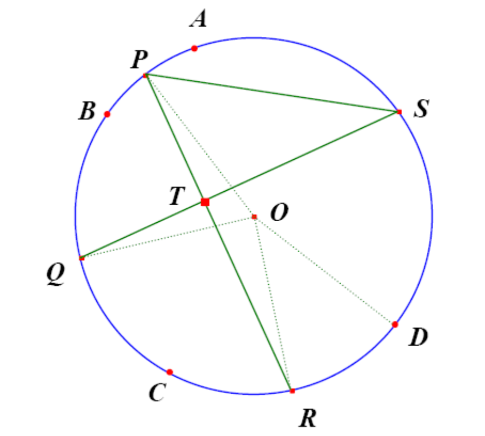
En el plano, consideramos segmentos que unen un punto (a, b) con un punto $(a+1, b\pm 1)$ (van siempre una unidad hacia la derecha y una unidad hacia arriba o hacia abajo).
Consideramos caminos que parten del origen de coordenadas $(0, 0)$ y están formados por segmentos de los anteriores. Les llamamos caminos contadores.
A cada posible forma de sacar las bolas le asociamos un camino contador: cada vez que sacamos una bola blanca subimos, y cada vez que sacamos una negra bajamos.

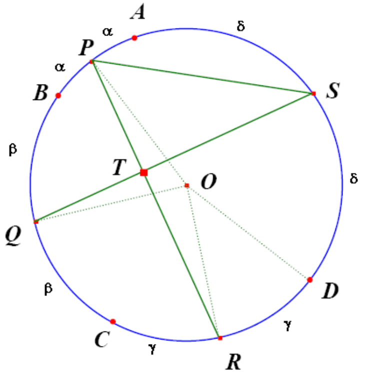
Puesto que sacamos n bolas de cada color, subimos tantas veces como bajamos, luego, los caminos contadores que así obtenemos llegan siempre al punto $(2n, 0)$.
Recíprocamente, a cada camino contador que llega al punto $(2n, 0)$ le asociamos una forma de sacar n bolas de cada color.
Así pues, el número de casos posibles es el número de caminos contadores que llegan a $(2n, 0)$.
Además, los casos favorables se identifican con caminos contadores que alcanzan alguna vez la altura k, que llamamos caminos favorables.
Transformamos cada uno de los caminos favorables del siguiente modo: tomamos el primer punto en el que la altura es k, y reflejamos la parte del camino que le sucede respecto de la recta $y = k$. Obtenemos así un camino contador que llega al punto $(2n, 2k)$.
Recíprocamente, todo camino contador que llega de $(2n, 2k)$ tiene en algún momento altura k.

Si tomamos el primer punto en el que tiene altura k y hacemos la misma reflexión que antes, obtenemos un camino que llega a $(2n, 0)$.
Así pues, el número de casos favorables es el número de caminos contadores que llegan a $(2n, 2k)$.
Sea a, b números naturales. El mismo argumento que nos lleva a identificar casos posibles con caminos contadores que llegan a $(2n, 0)$ nos lleva a identificar las formas de sacar de un saco a bolas blancas y b bolas negras con los caminos contadores que llegan a $(a+b, a-b)$. La cantidad de tales formas de sacar bolas $\binom{a+b}{a}$.
Por tanto la cantidad de tales caminos contadores es $\binom{a+b}{a}$.
Así pues, aplicando el argumento anterior con $a = b = n$, por una parte, y con $a = n + k$, $b = n - k$, por otra, obtenemos que el número de casos posibles es $\binom{2n}{n}$ y el favorables es $\binom{2n}{n+k}$ y. La respuesta es, por tanto,

$$\frac{\binom{2n}{n+k}}{\binom{2n}{n}} = \frac{(n!)^2}{(n-k)!(n+k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{(n+k) \cdot (n+k-1) \cdots (n+1)}.$$

Problema 101. *En la figura A, B, C, D son cuatro puntos de la circunferencia, P, Q, R, S son los puntos medios de los arcos AB, BC, CD, DA. Probar que PR es perpendicular a QS.*





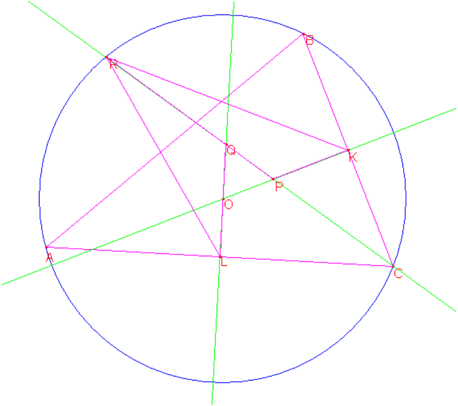
$$2\alpha + 2\alpha + 2\gamma + 2\delta = 360^\circ$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ$$

$$\angle POQ = \frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

Problema 102. *En un triángulo ABC la bisectriz del ángulo BCA corta a la circunferencia circunscrita en R ($R \neq C$, a la mediatriz de BC en P y a la mediatriz de AC en Q. El punto medio de BC es K y el punto medio de AC es L. Demostrar que los triángulos RPK y RQL tienen áreas iguales.*

Problema 102. *En un triángulo* ABC *la bisectriz del ángulo* BCA *corta a la circunferencia circunscrita en* R ($R \neq C$, *a la mediatriz de* BC *en* P *y a la mediatriz de* AC *en* Q. *El punto medio de* BC *es* K *y el punto medio de* AC *es* L. *Demostrar que los triángulos* RPK *y* RQL *tienen áreas iguales.*



$$\angle OQP = \angle OPQ = 90^\circ - \frac{C}{2}$$

por tanto $OP = OQ$. Como $OC = OR$ es $CQ = PR$ y $CP = QR$. Los triángulos $\triangle CQL$ y $\triangle CPK$ son semejantes por tanto

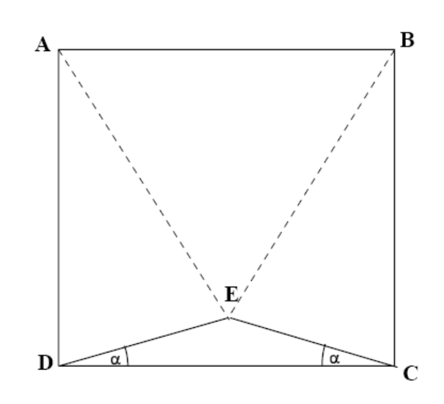
$$\frac{CQ}{CP} = \frac{QL}{PK}$$

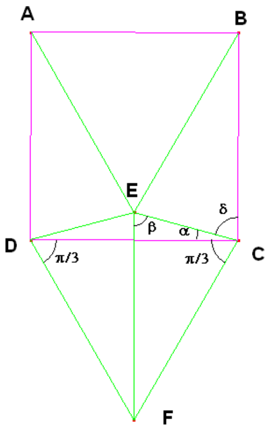
$$\frac{RP}{QR} = \frac{QL}{PK}$$

$$RP \cdot PK = QL \cdot QR$$

El área del triángulo $\triangle LQR$ es $\frac{1}{2} \cdot QL \cdot \cos \frac{C}{2} \cdot RQ$.
El área del triángulo $\triangle PQR$ es $\frac{1}{2} \cdot PK \cdot \cos \frac{C}{2} \cdot RP$.
Luego las dos áreas son iguales.

Problema 103. *En un cuadrado ABCD (ver la figura), $\alpha = \frac{\pi}{12}$. Probar que el triángulo ABE es equilátero.*





$$\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} = \frac{5\pi}{12} = \delta; \qquad \gamma = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{12}$$

$$\beta = \gamma \qquad EF = CF$$

EC es bisectriz de $\angle FCB$.

$$AE = EB = EF = FC = DC = BC.$$