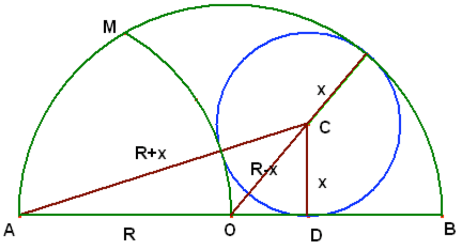
# Curso 2010-11

**Problema 84.** *Sea $AB$ el diámetro de una semicircunferencia de radio $R$ y sea $O$ el punto medio del segmento $AB$. Con centro en $A$ y radio $OA$ se traza el arco de circunferencia $OM$. Calcular, en función de $R$, el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo mixtilíneo $OMB$.*

**Problema 84.** *Sea $AB$ el diámetro de una semicircunferencia de radio $R$ y sea $O$ el punto medio del segmento $AB$. Con centro en $A$ y radio $OA$ se traza el arco de circunferencia $OM$. Calcular, en función de $R$, el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo mixtilíneo $OMB$.*



En el $\triangle ACD$,

$$AD = \sqrt{(R+x)^2 - x^2}.$$

En el $\triangle OCD$,

$$(R-x)^2 = x^2 + \left(\sqrt{(R+x)^2 - x^2} - R\right)^2,$$

de donde, operando,

$$R^2 - 2Rx + x^2 = x^2 + R^2 + 2Rx - 2R\sqrt{R^2 + 2Rx} + R^2,$$

$$2R\sqrt{R^2 + 2Rx} = R^2 + 4Rx,$$

$$2\sqrt{R^2 + 2Rx} = R + 4x,$$

$$4R^2 + 8Rx = R^2 + 8Rx + 16x^2,$$

$$3R^2 = 16x^2,$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{4}R.$$

**Problema 85.** *Se señalan sobre una circunferencia n puntos de tal modo que al trazar todas las cuerdas posibles que los unen de dos en dos no haya tres cuerdas concurrentes. ¿En cuántas regiones queda dividido el círculo por estas cuerdas?*

**Problema 85.** *Se señalan sobre una circunferencia $n$ puntos de tal modo que al trazar todas las cuerdas posibles que los unen de dos en dos no haya tres cuerdas concurrentes. ¿En cuántas regiones queda dividido el círculo por estas cuerdas?*

Para $n = 2, 3, 4, 5$ puntos resultan $2 = 2^1, 4 = 2^2, 8 = 2^3, 16 = 2^4$ regiones, pero para $n = 6$ sólo resultan 31 regiones y no 32 (*el problema de la región perdida*).
Dentro del círculo quedan determinados $\binom{n}{4}$ puntos de intersección de cuerdas (cada punto interior queda determinado por dos cuerdas que pasan por dos parejas de puntos distintos de la circunferencia, es decir, queda determinado por cuatro puntos distintos de la circunferencia).

El número de segmentos rectilíneos interiores es igual al número de cuerdas, $\binom{n}{2}$, más dos veces el número de puntos interiores de intersección de cuerdas (esto se puede probar por inducción sobre el número de cuerdas).
En el grafo que forma la circunferencia con las cuerdas, se cumple

$$\text{Regiones interiores} + \text{Vértices} = \text{Aristas} + 1,$$

luego el número de regiones es

$$\left[\binom{n}{2} + 2\binom{n}{4} + n\right] + 1 - \left[\binom{n}{4} + n\right] = 1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4}.$$

**Problema 86.** *Si $a$, $b$ y $c$ son los lados de un triángulo, demuestra que*

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geq 3.$$

**Problema 86.** *Si a, b y c son los lados de un triángulo, demuestra que*

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geq 3.$$

Haciendo los cambios

$$x=\frac{b+c-a}{2},\ y=\frac{a+c-b}{2},\ z=\frac{a+b-c}{2},$$

(los números $x, y, z$ son positivos por la *desigualdad triangular*) la desigualdad se reescribe

$$\frac{y+z}{2x}+\frac{z+x}{2y}+\frac{x+y}{2z}\geq 3$$

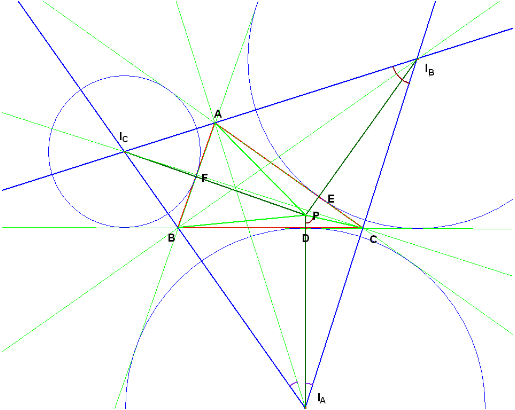
o equivalentemente,

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)\geq 6.$$

Para probar esta última desigualdad recordemos que si $u$ y $v$ son dos números reales positivos, entonces se verifica $\frac{u}{v} + \frac{v}{u} \geq 2$, con igualdad si y sólo si $u = v$. Luego en la desigualdad original la igualdad se alcanza solamente para un triángulo equilátero.

**Problema 87.** *Sea $ABC$ un triángulo, y sea $P$ un punto en su interior. Se denotan respectivamente por $D$, $E$ y $F$ los pies de las perpendiculares por $P$ a las rectas $BC$, $CA$ y $AB$, y supongamos que se cumple $AP^2 + PD^2 = BP^2 + PE^2 = CP^2 + PF^2$. Si se denotan por $I_A$, $I_B$, $I_C$ los exincentros (centros de las circunferencias tangentes a un lado y a las prolongaciones de los otros dos lados) del triángulo $ABC$, probar que $P$ es el circuncentro del triángulo $I_A I_B I_C$.*

*Solución 1.*




Sea $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, y $p = \frac{a+b+c}{2}$.
Por la hipótesis es $BD^2 = BP^2 - PD^2 = AP^2 - PE^2 = AE^2$; por tanto, $BD = AE$.

De forma análoga resulta $CE = BF$ y $AF = CD$. Como $BD + DC = a$, $CE + EA = b$ y $AF + FB = c$, obtenemos que $BD = AE = p - c$, $CE = BF = p - a$, y $AF = CD = p - b$, lo que implica que $D$, $E$ y $F$ son los puntos de tangencia de las circunferencias exinscritas con los lados $BC$, $CA$, y $AB$, respectivamente. En particular, $D$ está en la recta $PI_A$, y análogamente resulta para $E$ y $F$.

$$I_C I_A \perp I_B B$$

$$AB \perp I_C P$$

$$\angle PI_C B = \angle ABI_B = \frac{B}{2}$$

$$PI_A \perp BC$$

$$I_B BC = BI_A P = \frac{B}{2}$$

$\triangle PI_C I_A$ es isósceles de lados iguales $I_C P = I_A P$. De forma análoga se prueba que $I_B P = I_A P$. Por lo tanto $P$ es el circuncentro.

*Solución 2.*

Como $I_A I_B$ es la bisectriz exterior de $\angle C$ es $\angle BCI_A = \frac{\pi - C}{2}$, de forma análoga $\angle ABI_C = \frac{\pi - B}{2}$ y $\angle CAI_B = \frac{\pi - A}{2}$

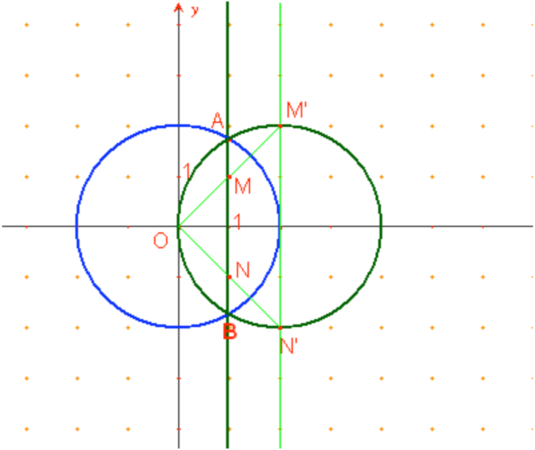
$$\angle I_A = \frac{\pi - C}{2} + \frac{\pi - B}{2} = \frac{\pi - A}{2}$$

$$\angle I_B = \frac{\pi - B}{2}, \quad \angle I_C = \frac{\pi - C}{2}.$$

La bisectriz interior $I_A A$ es perpendicular a la bisectriz exterior $I_B I_C$; por tanto $I_A A$ es la altura por $I_A$ del triángulo $\triangle I_A I_B I_C$. Además, $\angle I_C I_A A = \frac{\pi}{2} - \angle AI_C I_A = \frac{C}{2}$ y $\angle DI_A C = \frac{\pi}{2} - \angle BCI_A = \frac{C}{2}$. Por tanto, $I_a D$ es la imagen de la altura $I_A A$ en la simetría de eje la bisectriz interior de $\angle I_B I_A I_C$. Se sigue que $I_A D$ pasa por el circuncentro del $\triangle I_A I_B I_C$. De forma análoga $I_B E$, $I_C F$ pasan por el circuncentro.

**Problema 88.** *Los puntos $M$ de la recta $x = 1$ se transforman en los $M'$, tales que $O$, $M$, $M'$ están alineados y $OM \cdot OM' = 4$. Se pide:*

1. *Determinar el lugar geométrico de los puntos $M'$.*
2. *Hallar el par de puntos $M$, $M'$ correspondientes en la transformación, tales que $M$ sea el punto medio del segmento $OM'$.*




La transformación es una *inversión de centro $O$ y potencia 4*, de *circunferencia de puntos dobles* la circunferencia de centro $O$ y radio 2.

La transformada de la recta $x = 1$ es la circunferencia que pasa por $A$, $O$ y $B$, de centro $(2, 0)$ y radio 2, de ecuación $(x - 2)^2 + y^2 = 4$.

Los puntos $M'$ que verifican que $M$ es el punto medio de $OM'$ estarán en la recta homotética de $x = 1$ en la *homotecia de centro O y razón 2*, que es la recta $x = 2$; como además tienen que estar en la circunferencia $(x-2)^2 + y^2 = 4$, resolviendo el sistema resulta $M = (1, 1)$, $M' = (2, 2)$ y $N = (1, -1)$, $N' = (2, -2)$.

**Problema 89.** *Sean* $a, b, c > 0$*. Probar que*
$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$ *(desigualdad de Nesbitt).*

**Problema 89.** *Sean* $a, b, c > 0$*. Probar que*
$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$ *(desigualdad de Nesbitt).*

*Solución 1.*

**Lema 1.** Sean $x, y$ números positivos y $a, b$ reales. Se tiene $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$:

$$(a^2y + b^2x)(x + y) \geq xy(a + b)^2$$

$$a^2xy + b^2x^2 + a^2y^2 + b^2xy \geq a^2xy + 2abxy + b^2xy$$

$$(bx - ay)^2 \geq 0$$

**Lema 2.** Sean $x, y, z$ números positivos y $a, b, c$ reales. Se tiene $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$$

Las dos desigualdades se deducen del lema 1.

Por el lema 2 tenemos

$$\frac{a^2}{a(b+c)} + \frac{b^2}{b(c+a)} + \frac{c^2}{c(a+b)} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+ac+bc)} =$$

$$= 1 + \frac{a^2+b^2+c^2}{2(ab+ac+bc)}$$

Por Cauchy-Schwarz es $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$, por lo tanto

$$1 + \frac{a^2+b^2+c^2}{2(ab+ac+bc)} \geq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

*Solución 2.* Equivalentemente,

$$\frac{a}{b+c}+1+\frac{b}{c+a}+1+\frac{c}{a+b}+1\geq\frac{9}{2}\,,$$

es decir,

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\geq\frac{9}{2}\,.$$

Pero esto resulta de la desigualdad entre medias armónica y geométrica:

$$\frac{3}{\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}}\leq\frac{b+c+c+a+a+b}{3}=\frac{2}{3}(a+b+c)\,.$$

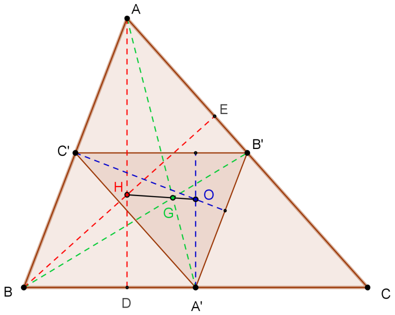
**Problema 90.** *Sean $a, b, c$ las longitudes de los lados de un triángulo $ABC$, $R$ el radio de la circunferencia circunscrita, $O$ el circuncentro, $G$ el baricentro y $H$ el ortocentro. Probar:*

1. *Los puntos $H$, $G$ y $O$ están alineados (recta de Euler), y $HG = 2 \cdot GO$.*
2. $OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$.

**Problema 90.** *Sean $a, b, c$ las longitudes de los lados de un triángulo $ABC$, $R$ el radio de la circunferencia circunscrita, $O$ el circuncentro, $G$ el baricentro y $H$ el ortocentro. Probar:*

1. *Los puntos $H$, $G$ y $O$ están alineados (recta de Euler), y $HG = 2 \cdot GO$.*
2. *$OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$.*

1.

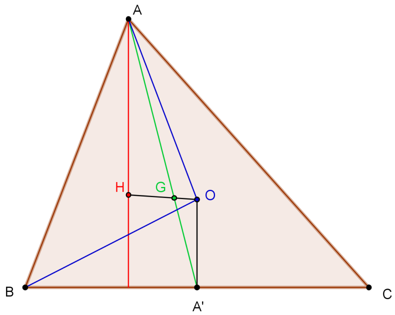


Sean $A'$, $B'$ y $C'$ los puntos medios de los lados del $\triangle ABC$. El $\triangle A'B'C'$ es semejante al $\triangle ABC$ con razón de semejanza $1/2$. Las mediatrices del $\triangle ABC$ son alturas del $\triangle A'B'C'$, así que el punto $O$ es ortocentro del $\triangle A'B'C'$. De ahí resulta que $AH = 2 \cdot OA'$. Además sabemos que $AG = 2 \cdot GA'$ y que las rectas $AD$ y $OA'$ son paralelas (por ser ambas perpendiculares a $BC$). Luego $\angle HAG = \angle OA'G$, los triángulos $HAG$ y $OA'G$ son entonces semejantes, $HG = 2 \cdot GO$, y también se tiene

$$\angle AGH = \angle A'GO,$$

lo que demuestra que los tres puntos $O$, $G$ y $H$ están alineados.

2.




Por el *teorema de Stewart* aplicado al $\triangle AOA'$ dividido por la *ceviana* $OG$, se tiene

$$AA' \cdot (OG^2 + AG \cdot GA') = AO^2 \cdot GA' + OA'^2 \cdot AG.$$

Pero aquí, $OG^2 = \frac{1}{9}OH^2$ por el apartado anterior, $AG = \frac{2}{3}AA'$, $GA' = \frac{1}{3}AA'$ y $OA = R$.

Se sustituye todo, se divide por $AA'$ y queda

$$OH^2 + 2 \cdot AA'^2 = 3R^2 + 6 \cdot OA'^2.$$

Por el teorema de Pitágoras en el $\triangle OA'B$, se tiene $OA'^2 = R^2 - (a/2)^2$, luego

$$OH^2 + 2 \cdot AA'^2 = 3R^2 + 6R^2 - \frac{3a^2}{2}.$$

Finalmente, $AA'^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$ (por la *ley del paralelogramo*), luego

$$OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$