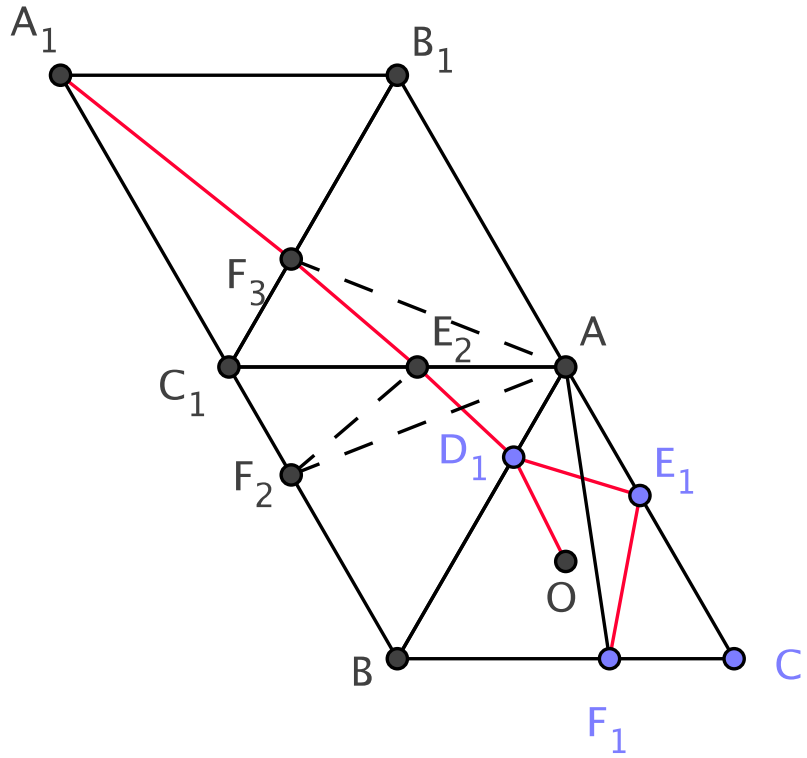
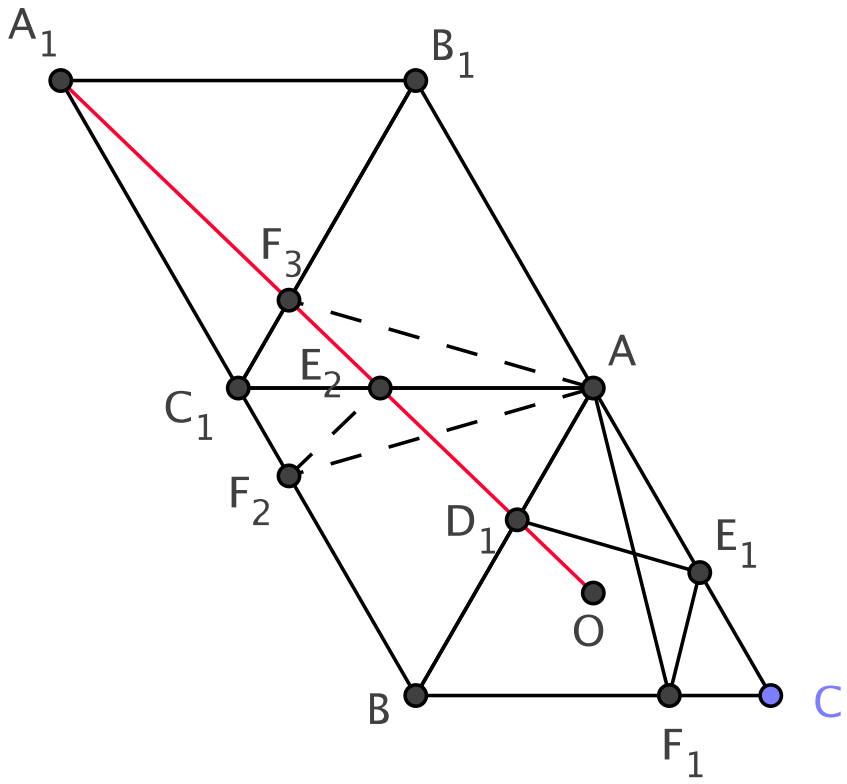
Curso 2010-11

Problema 77. *Se considera un triángulo equilátero de lado 1 y centro O, y vértices A, B y C. Un rayo luminoso parte de O, se refleja una vez en cada uno de los tres lados, AB, AC y BC (en el orden dado) y alcanza el vértice A. Determina la longitud mínima del recorrido del rayo.*

Problema 77. *Se considera un triángulo equilátero de lado 1 y centro O, y vértices A, B y C. Un rayo luminoso parte de O, se refleja una vez en cada uno de los tres lados, AB, AC y BC (en el orden dado) y alcanza el vértice A. Determina la longitud mínima del recorrido del rayo.*



Construimos un rayo que parte desde O, se refleja en los lados AB, AC y BC, por ese orden, y llega hasta A. En el dibujo de arriba ese camino es la poligonal $OD_1E_1F_1A$. El recorrido del rayo luminoso lo transformamos en 3 pasos. Así, hacemos una simetría del triángulo ABC respecto al lado AB; observar que AB queda invariante y el vértice C se transforma en C_1.
Ahora hacemos el simétrico de ABC_1 respecto al lado AC_1. El punto B se transforma en B_1. Por último hacemos una simetría del triángulo AB_1C_1 respecto al lado B_1C_1; el punto A se transforma en el punto A_1.
Sean E_2 y F_2, respectivamente, los simétricos de E_1 y F_1 respecto a AB. F_3 es el simétrico de F_2 respecto a AC_1. La longitud de $OD_1E_1F_1A$, que es la poligonal que representa el recorrido del rayo, coincide con la longitud de la poligonal $OD_1E_2F_3A_1$.
La longitud del rayo será mínima cuando la poligonal $OD_1E_2F_3A_1$ coincida con el segmento OA_1, como se ve en la figura de debajo.



Para calcular la longitud del recorrido asociado al segmento OA_1, notamos que el ángulo A_1BO mide $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$, ya que el triángulo es equilátero, con lo cual los ángulos miden $\frac{\pi}{3}$ y el ángulo que forman un lado y una altura concurrentes en un vértice es la mitad.

El lado A_1B mide 2. El segmento BO mide $\frac{\sqrt{3}}{3}$, utilizando el teorema de Pitágoras y recordando que O es el baricentro del triángulo. Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo A_1BO, el segmento A_1O mide $\sqrt{\frac{13}{3}}$.

Problema 78. *Calcula las soluciones reales de la ecuación* $\sqrt[3]{1729 - x} + \sqrt[3]{x} = 19$.

Problema 78. *Calcula las soluciones reales de la ecuación* $\sqrt[3]{1729-x}+\sqrt[3]{x}=19$.

Comencemos transformando la ecuación propuesta tomando $\sqrt[3]{x}=t$. De esta forma tendremos que encontrar las soluciones de la ecuación

$$\sqrt[3]{1729-t^3}+t=19,$$

que puede reescribirse como

$$\sqrt[3]{1729-t^3}=19-t.$$

Del mismo modo que cuando en una ecuación aparece una raíz cuadrada elevamos toda la ecuación al cuadrado para eliminarla, aquí debemos elevarla al cubo para eliminar la raíz cúbica. Recordamos el binomio de Newton,

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= \binom{3}{0}a^3+\binom{3}{1}a^2b+\binom{3}{2}ab^2+\binom{3}{3}b^3\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.\end{aligned}$$

Con esto, elevando a la cuarta ambos lados de la ecuación, llegamos a

$$1729 - t^3 = (19 - t)^3 = 6859 - 1083t + 57t^2 - t^3,$$

que de manera elemental se transforma en

$$t^2 - 19t + 90 = 0.$$

Resolviendo la ecuación, las raíces del polinomio son $t = 9$ y $t = 10$. Así, volviendo a la variable original x, obtenemos las soluciones $x = 9^3 = 729$ y $x = 10^3 = 1000$.

Problema 79. *Si x e y son números reales, $0 < p$, $0 < q$ y $p + q < 1$, probar que*

$$(px + qy)^2 \leq px^2 + qy^2.$$

Problema 79. *Si x e y son números reales, $0 < p$, $0 < q$ y $p + q < 1$, probar que*

$$(px + qy)^2 \leq px^2 + qy^2.$$

Solución 1.
Si $(x, y) = (0, 0)$ la relación es cierta con igualdad. En otro caso, $px^2 + qy^2 > 0$ y la desigualdad a probar es equivalente a

$$\frac{(px + qy)^2}{px^2 + qy^2} \leq 1.$$

Pero (haciendo la división) se tiene

$$\frac{p^2x^2 + q^2y^2 + 2pqxy}{px^2 + qy^2} = p + q - \frac{pq(x - y)^2}{px^2 + qy^2} \leq p + q < 1,$$

luego la desigualdad, si $(x, y) \neq (0, 0)$, es estricta.

Solución 2. Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwartz a los vectores $(\sqrt{p}, \sqrt{q})$ y $(x\sqrt{p}, y\sqrt{q})$, resulta

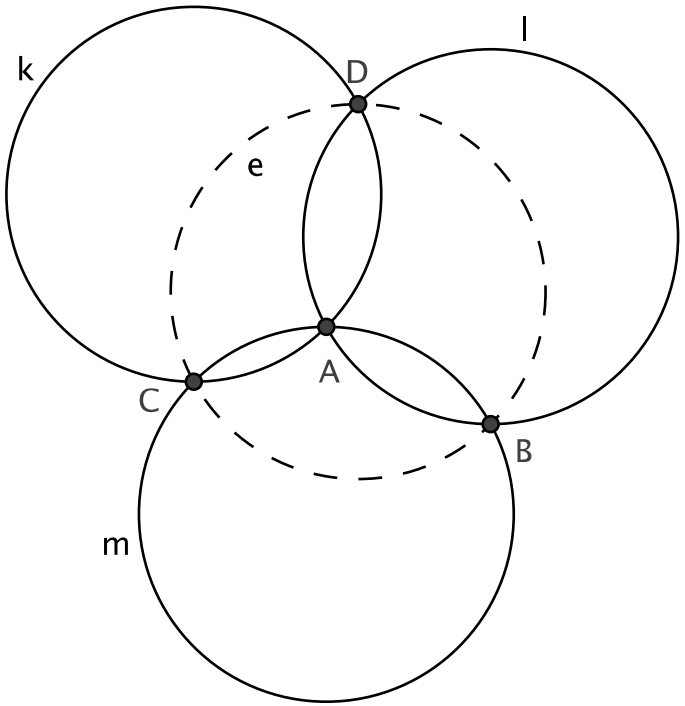
$$(px + qy)^2 \leq (p + q)(px^2 + qy^2) \leq px^2 + qy^2,$$

con la primera desigualdad alcanzada sólo si $x = y$ y la segunda alcanzada sólo si $x = y = 0$, obteniendo la misma conclusión.

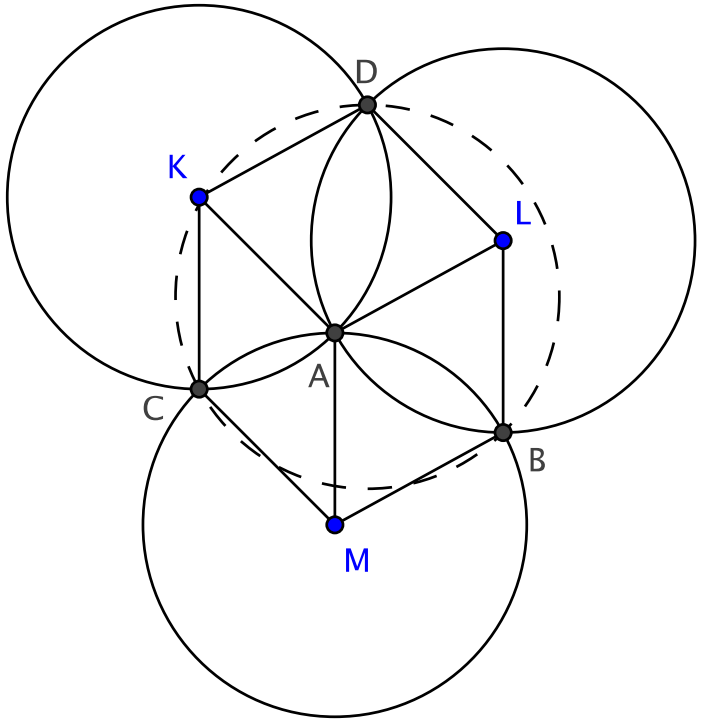
Problema 80. *En el plano, tres circunferencias del mismo radio r pasan por un mismo punto A. Los otros tres puntos de intersección de cada dos de ellas son B, C y D. Probar que la circunferencia que pasa por B, C y D tiene también el mismo radio r.*

Problema 80. *En el plano, tres circunferencias del mismo radio r pasan por un mismo punto A. Los otros tres puntos de intersección de cada dos de ellas son B, C y D. Probar que la circunferencia que pasa por B, C y D tiene también el mismo radio r.*

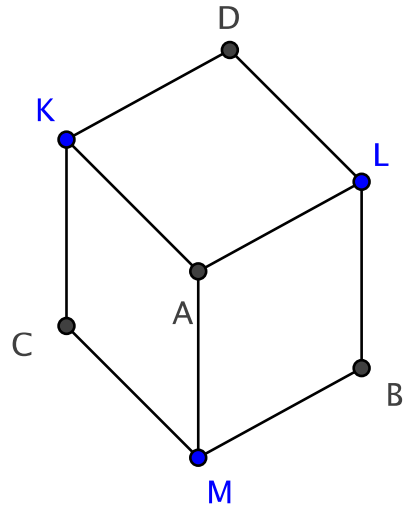
La figura adjunta muestra las tres circunferencias k, l y m, y la cuarta e, que pasa por B, C y D.



Sean K, L y M los centros de las circunferencias k, l y m, respectivamente. Unimos K con C, D y A, y así con los otros dos centros.

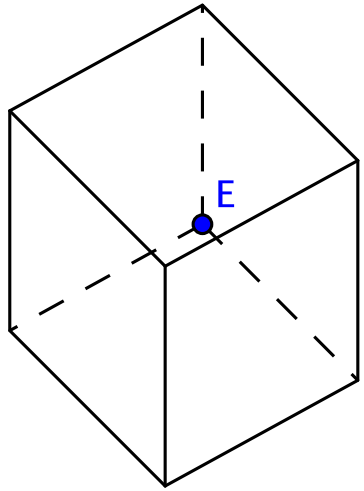


Si extraemos del dibujo sólo la *parte rectilinea*, nos queda la siguiente figura



Este dibujo nos conduce a enunciar nuestro problema en la siguiente forma:
Si los nueve segmentos $KA, KC, KD, LD, LA, LB, MB, MC, MA$ *tienen todos longitud* r*, probar que existe un punto* E *tal que los segmentos* EB, EC *y* ED *miden también* r*.*
En esta figura, los cuadriláteros $AMCK, AKDL$ y $ALBM$ son rombos, ya que tienen los cuatro lados iguales, por hipótesis. Notar que los lados opuestos de un rombo son paralelos. De este modo, los segmentos CK, AM y LB son paralelos, así como CM, AK y DL, y KD, LA y BM.

Pintamos en la última figura el centro E de la circunferencia e y los tres radios EB, EC y ED, y obtenemos la siguiente figura:



Tenemos que la última figura es la proyección de las 12 aristas de un paralelepípedo que tiene la particularidad de que dichas proyecciones tienen todas la misma longitud. Si el paralelepípedo se elige de manera que las proyecciones de las 9 aristas iniciales miden todas r, como sucede por hipótesis, las proyecciones de las 3 aristas restantes deben medir también r. Estos 3 segmentos de longitud r se han trazado a partir de la proyección del octavo vértice, el invisible, y esta proyección E es el centro de una circunferencia que pasa por B, C y D, con radio r.

Problema 81. *Calcular*

$$\sum_{k=5}^{49} \frac{11_{(k}}{\sqrt[3]{1331_{(k}}}$$

sabiendo que los números 11 y 1331 están escritos en base $k \geq 4$.

Problema 81. *Calcular*

$$\sum_{k=5}^{49} \frac{11_{(k}}{\sqrt[3]{1331_{(k}}}$$

sabiendo que los números 11 y 1331 están escritos en base $k \geq 4$.

Se tiene

$$11_{(k} = k + 1,$$
$$1331_{(k} = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 = (k+1)^3,$$

luego

$$\frac{11_{(k}}{\sqrt[3]{1331_{(k}}} = \frac{k+1}{2^{k+1}}\,.$$

Así que la suma pedida es

$$S = \sum_{k=5}^{49} \frac{k+1}{2^{k+1}} = \sum_{k=6}^{50} \frac{k}{2^k}$$

(suma de una *progresión aritmético-geométrica*). Ahora bien,

$$2S = \sum_{k=5}^{49} \frac{2k+2}{2^{k+1}} = \sum_{k=5}^{49} \frac{k}{2^k} + \sum_{k=5}^{49} \frac{1}{2^k} = \frac{5}{2^5} + S - \frac{50}{2^{50}} + \frac{\frac{1}{2^5} - \frac{1}{2^{50}}}{\frac{1}{2}},$$

de donde resulta

$$S = \frac{7 \cdot 2^{43} - 13}{2^{48}}.$$

Problema 82. *Dado un paralelogramo cuyos vértices son puntos de coordenadas enteras y que no tiene un lado en el eje de las x, llamamos n_i al número de puntos de coordenadas enteras que son interiores al paralelogramo y no están sobre sus lados, n_b al número de puntos de coordenadas enteras que están sobre los lados del paralelogramo. Demostrar que el área del paralelogramo es*

$$A = n_i + \frac{1}{2} n_b - 1 \,.$$

Problema 82. *Dado un paralelogramo cuyos vértices son puntos de coordenadas enteras y que no tiene un lado en el eje de las x, llamamos n_i al número de puntos de coordenadas enteras que son interiores al paralelogramo y no están sobre sus lados, n_b al número de puntos de coordenadas enteras que están sobre los lados del paralelogramo. Demostrar que el área del paralelogramo es*

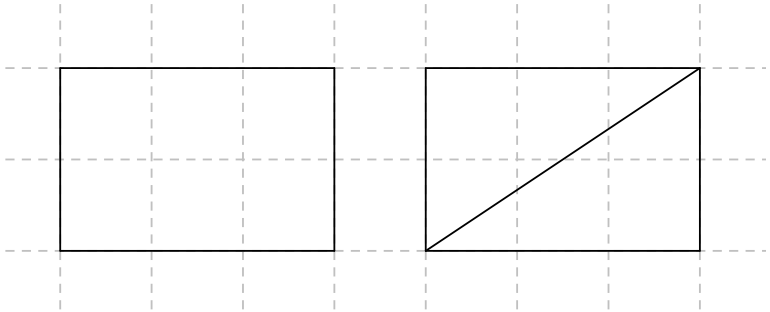
$$A = n_i + \frac{1}{2} n_b - 1 \, .$$

Si el paralelogramo es un rectángulo de lados paralelos a los ejes, de lados a y b, su área es $a \cdot b$.

$$n_i = (a-1) \cdot (b-1) = a \cdot b - a - b + 1$$

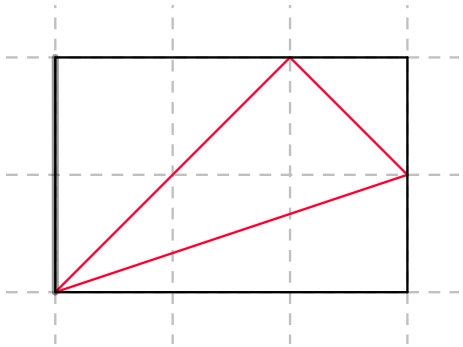
$$n_b = 2a + 2b$$

$$A = n_i + \frac{1}{2} n_b - 1 = a \cdot b - a - b + 1 + \frac{1}{2}(2a + 2b) - 1 = a \cdot b$$

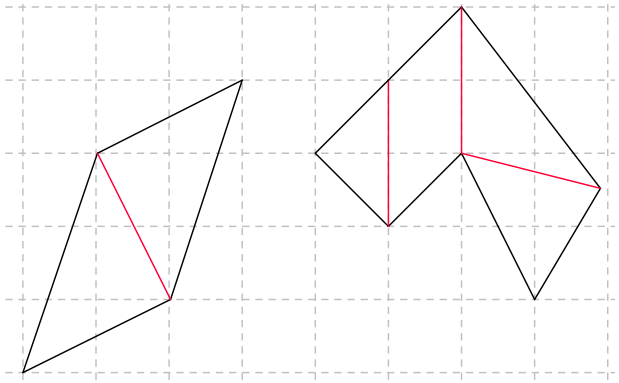


Cada uno de los triángulos en que queda dividido uno de estos rectángulos por una de sus diagonales verifica la fórmula, pues los puntos de la diagonal se cuentan en los dos triángulos.
Dos polígonos que verifican la fórmula y cuya intersección es un lado común, al eliminar el lado común dan lugar a un polígono que también verifica la fórmula.

Los triángulos de vértices en puntos de coordenadas enteras verifican la fórmula:



Los paralelogramos de vértices en puntos de coordenadas enteras verifican la fórmula:



Teorema de Pick: Los polígonos de vértices en puntos de coordenadas enteras verifican $A = n_i + \frac{1}{2}n_b - 1$.

Problema 83. *Decimos que un conjunto E de números naturales es especial cuando al tomar dos elementos distintos cualesquiera a, b en E se tiene que $(a-b)^2$ divide al producto ab.*

1. *Encuentra un conjunto especial formado por tres elementos.*
2. *¿Existe un conjunto especial formado por cuatro números naturales que están en progresión aritmética?*

Problema 83. *Decimos que un conjunto E de números naturales es especial cuando al tomar dos elementos distintos cualesquiera a, b en E se tiene que $(a-b)^2$ divide al producto ab.*

1. *Encuentra un conjunto especial formado por tres elementos.*
2. *¿Existe un conjunto especial formado por cuatro números naturales que están en progresión aritmética?*

Comenzamos por el segundo apartado. Pensamo, en primer lugar, en un conjunto especial formado por cuatro números naturales en progresión aritmética. Sean $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ los números del conjunto. Se tiene que:

- existe c tal que $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3 = c$;
- existen números naturales d_{ij} tales que $x_i x_j = d_{ij}(x_i - x_j)^2$.

Supongamos que los cuatro son pares. Construimos los números naturales $y_1 = \frac{x_1}{2}, y_2 = \frac{x_2}{2}, y_3 = \frac{x_3}{2}, y_4 = \frac{x_4}{2}$. Estos cuatro números también cumplen las relaciones arriba descritas. Basta dividir por 2 la primera y por 2^2 la segunda.

Reiterando el proceso descrito conseguimos un conjunto especial formado por cuatro números en progresión aritmética en el que al menos uno de ellos es impar. Sean $z_1 < z_2 < z_3 < z_4$ estos números. Sea $z_2 - z_1 = z_3 - z_2 = z_4 - z_3 = d$.
Notamos que $z_3 - z_1 = z_4 - z_2 = 2d$ son números pares. O sea, z_2 tiene la misma paridad que z_4; z_3 la misma que z_1. Por tanto, una de las dos parejas es impar. Sea a, b esa pareja de números.
Notamos que ab es impar y que $(a-b)^2$ es par. Pero, como ab es un múltiplo de $(a-b)^2$, ab es también par. Y obtenemos una contradicción.
Hemos probado así el segundo hecho. Buscamos ahora un ejemplo para el primero. Sean $x_1 < x_2 < x_3$ los números de un conjunto especial formado por tres números naturales en progresión aritmética. Por una parte, buscamos un conjunto que tiene un número impar. Por otra, x_1, x_3 tienen la misma paridad y no pueden ser impares. Por tanto buscamos conjuntos en los que x_1, x_3 son pares y x_2 es impar. Probamos con el conjunto $\{2, 3, 4\}$. Efectivamente, este conjunto cumple las condiciones requeridas.