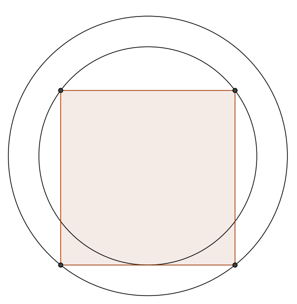
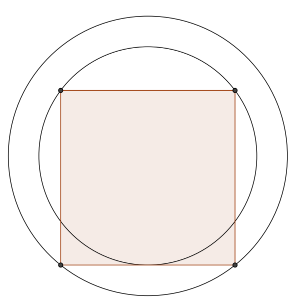
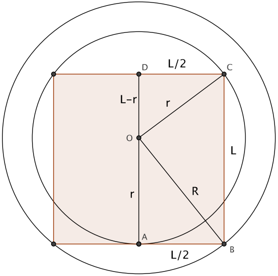
Curso 2010-11

Problema 71. *En una corona circular se inscribe un cuadrado de modo que uno de sus lados es tangente a la circunferencia menor (de radio r) y tiene sus dos vértices en la circunferencia mayor (de radio R). El lado paralelo al anterior tiene sus dos vértices en la circunferencia menor. Hallar la razón R/r.*



Problema 71. *En una corona circular se inscribe un cuadrado de modo que uno de sus lados es tangente a la circunferencia menor (de radio r) y tiene sus dos vértices en la circunferencia mayor (de radio R). El lado paralelo al anterior tiene sus dos vértices en la circunferencia menor. Hallar la razón R/r.*





Por un lado, en el triángulo $\triangle OAB$, por el teorema de Pitágoras, tenemos la relación $r^2 + \frac{L^2}{4} = R^2$, de donde

$$L = 2\sqrt{R^2 - r^2}. \tag{1}$$

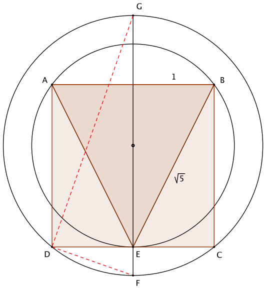
Por otro lado, en el triángulo $\triangle DOC$, por el teorema de Pitágoras, tenemos la relación $\frac{L^2}{4} + (1-r)^2 = r^2$, de donde

$$L = \frac{8r}{5}. \tag{2}$$

Igualando (1) y (2), llegamos a la relación

$$\frac{R^2}{r^2} = \frac{41}{25} \Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{\sqrt{41}}{5}$$

Solución 2.



Pongamos que el lado del cuadrado tenga longitud 2. Entonces, el área del triángulo ABE de la figura es 2, y usando la fórmula que da el área de un triángulo en función de los lados y el circumradio, se tiene

$$2 = \frac{2 \cdot 5}{4r},$$

luego $r = 5/4$.

Por otra parte, aplicando el teorema de la altura al triángulo rectángulo DFG, se tiene

$$DE^2 = EF \cdot EG, \quad \text{es decir,} \quad 1 = (R-r)(r+R) = R^2 - r^2 = R^2 - \frac{25}{16},$$

luego $R = \sqrt{41}/16$ y $R/r = \sqrt{41}/5$.

Problema 72. *Demostrar que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sqrt[n]{n} < 1 + \dfrac{2}{\sqrt{n}}$.

Problema 72. *Demostrar que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sqrt[n]{n} < 1 + \dfrac{2}{\sqrt{n}}$.

La desigualdad de las medias aritmética y geométrica aplicada a los n números positivos $1, 1, \dots, 1, \sqrt{n}, \sqrt{n}$, da

$$\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{1 \cdot 1 \cdots 1 \cdot \sqrt{n} \cdot \sqrt{n}} \leq \frac{n - 2 + 2\sqrt{n}}{n} = 1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{\sqrt{n}} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Problema 73. *Sean* a, b *números reales tales que la ecuación* $x^4 + ax^3 + 2x^2 + bx + 1 = 0$ *tiene una solución real; demostrar que*

$$a^2 + b^2 \geq 8.$$

Problema 73. *Sean a, b números reales tales que la ecuación $x^4 + ax^3 + 2x^2 + bx + 1 = 0$ tiene una solución real; demostrar que*

$$a^2 + b^2 \geq 8.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|ax^3 + bx| = (x^4 + 2x^2 + 1) \Rightarrow (a^2 + b^2)(x^6 + x^2) \geq (x^4 + 2x^2 + 1)^2$$

Como

$$\frac{(x^4 + 2x^2 + 1)^2}{x^6 + x^2} \geq 8 \Leftrightarrow (x^2 - 1)^4 \geq 0$$

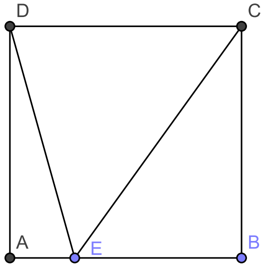
se tiene la desigualdad que queríamos probar.

Problema 74.

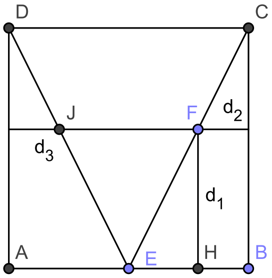
a) *En un cuadrado de lado unidad, tomamos el punto medio de uno de los lados, y lo unimos con los vértices del lado opuesto, formando un triángulo isósceles. Tomamos un punto arbitrario en uno de los lados del triángulo. Sean* d_1, d_2 *y* d_3*, respectivamente, las distancias del punto a los tres lados del cuadrado que no coinciden con un lado del triángulo. Demostrar que una de las distancias es la suma de las otras dos.*

b) *Sea el cuadrado* $ABCD$ *de la figura, de lado unidad, y sea* a *la distancia* AE*. Tomamos un punto arbitrario en el lado* EC *del triángulo. Sean* d_1, d_2 *y* d_3*, respectivamente, las distancias de ese punto a los lados* AB, BC *y* DA *del cuadrado. Probar que*

$$d_3 = d_1 + d_2\left(\frac{a}{1-a}\right).$$



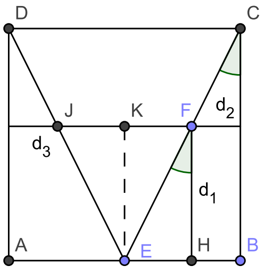
Solución a).
El caso en el que tomamos un punto del lado del triángulo coincidente con un lado del cuadrado es trivial.
Vamos a probar el resultado con un punto cualquiera de uno de los otros dos lados.



En la figura, tomamos un punto F arbitrario en el lado EC. Hay que probar que $d_3 = d_2 + d_1$, lo que, por la simetría de la figura, se reduce a probar que $JF = d_1$.

El triángulo $\triangle EHF$ es semejante al $\triangle EBC$. De este modo,

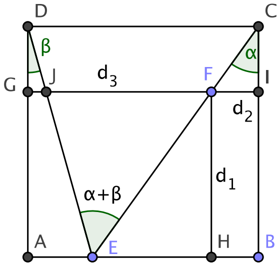
$$\frac{EH}{1/2} = \frac{d_1}{1}$$



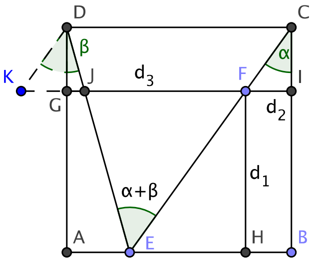
De donde $EH = \frac{d_1}{2}$. Por otro lado, los triángulos $\triangle EHF$ y $\triangle EFK$, con K el punto medio de JF, son iguales. Así, $EH = FK = \frac{1}{2}JF$, y teniendo en cuenta lo anterior, $JF = d_1$.

Solución b).

Dibujamos el cuadrado $ABCD$, y tomamos un punto F arbitrario en el lado EC. Llamemos α al ángulo $\angle ECB$ y β al $\angle ADE$. Se tiene que $\angle DEC = \alpha + \beta$.



Dibujamos un triángulo exactamente igual al $\triangle CFI$ a continuación del $\triangle DGJ$, como se ve en la figura.



$\triangle JEF$ y $\triangle DKJ$ son semejantes. De aquí, tenemos que

$$\frac{EF}{KD} = \frac{JF}{d_2 + d_3 - JF}. \tag{3}$$

Como $\triangle FEH$ y $\triangle CFI$ son semejantes,

$$EF = \frac{d_1}{\cos \alpha}. \tag{4}$$

Por otro lado,

$$KD = CF = \frac{d_2}{\sin\alpha}. \tag{5}$$

Además, por la semejanza de $\triangle JEF$ y $\triangle DEC$, $\frac{JF}{1} = \frac{EF}{EC}$.

De aquí se deduce, usando (4), que $JF = \frac{\frac{d_1}{\cos\alpha}}{\frac{1}{\cos\alpha}}$, de donde tenemos que

$$JF = d_1. \tag{6}$$

Combinando (3), (4), (5) y (6), $\frac{\frac{d_1}{\cos\alpha}}{\frac{d_2}{\sin\alpha}} = \frac{d_1}{d_2+d_3-d_1}$, de donde $(d_2 + d_3 - d_1)\tan\alpha = d_2$, y como $\tan\alpha = 1 - a$, se tiene, tras una manipulación sencilla, que

$$d_3 = d_1 + d_2\left(\frac{a}{1-a}\right),$$

que relaciona las tres distancias entre sí y con la distancia a. Notar que para $a = 1/2$, obtenemos la relación del apartado a).

Problema 75. *Considérese la sucesión definida como* $a_1 = 3$, *y* $a_{n+1} = a_n + a_n^2$. *Determínense las dos últimas cifras de* a_{2011}.

Problema 75. *Considérese la sucesión definida como* $a_1 = 3$, *y* $a_{n+1} = a_n + a_n^2$. *Determínense las dos últimas cifras de* a_{2011}.

Se tiene $a_1 = 3$ y $a_{n+1} = a_n + a_n^2 = a_n(1 + a_n)$.
Escribimos los primeros términos de la sucesión:

$$3, 12, 156,\ 156{\cdot}157 = 24\,492,\ 24\,492 \cdot 24\,493 = 599\,882556,$$
$$599\,882556 \cdot 599\,882557 = \ldots 92, \ldots$$

Supongamos que a_n termina en 92. Entonces, $a_n = 100a + 92$, y tenemos

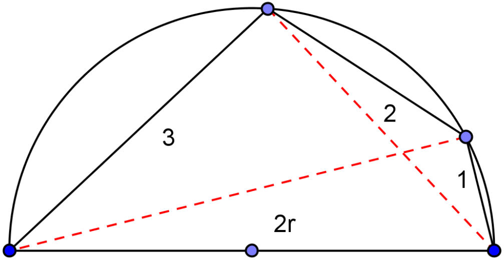
$$\begin{aligned} a_{n+1} = (100a + 92)(100a + 93) &= 100b + 92 \cdot 93 \\ &= 100b + 100c + 56 = 100d + 56, \end{aligned}$$

es decir, las últimas cifras de a_{n+1} son 56. Análogamente, si a_n termina en 56, se prueba que a_{n+1} termina en 92.
Como 2011 es impar, entonces a_{2011} termina en 56.

Problema 76. *Un hexágono está inscrito en una circunferencia de radio r. Dos de sus lados tienen longitud 1, dos tienen longitud 2, y los otros dos longitud 3. Prueba que r es una raíz de la ecuación $2r^3 - 7r - 3 = 0$.*

Problema 76. *Un hexágono está inscrito en una circunferencia de radio r. Dos de sus lados tienen longitud 1, dos tienen longitud 2, y los otros dos longitud 3. Prueba que r es una raíz de la ecuación* $2r^3 - 7r - 3 = 0$.

En las condiciones del problema, tres cuerdas consecutivas de longitudes 1, 2 y 3 abarcarán media circunferencia de radio r:



Aplicando al cuadrilátero de la figura de lados 1, 2, 3 y $2r$ el teorema de Ptolomeo (las diagonales, por el teorema de Pitágoras, miden $\sqrt{4r^2-1}$ y $\sqrt{4r^2-9}$), se tiene:

$$4r+3=\sqrt{4r^2-1}\cdot\sqrt{4r^2-9},$$

de donde, operando, resulta $2r^3-7r-3=0$.