Curso 2010-11

Problema 65. *Sea un número de tres cifras, abc. Se suman los cinco números acb, bac, bca, cab y cba y resulta que sale 3194. ¿Cuál es el número abc?.*

Problema 65. *Sea un número de tres cifras, abc. Se suman los cinco números acb, bac, bca, cab y cba y resulta que sale 3194. ¿Cuál es el número abc?.*

Escribimos los **seis** números mediante sus descomposiciones decimales, y los sumamos; así, $abc + acb + bac + bca + cab + cba$ se escribe como $222(a + b + c)$. Tenemos entonces que $222(a + b + c)$ es igual a 3194 más el valor de abc. Como $a + b + c$ es un valor comprendido entre 1 y 27, buscamos los números entre estos tales que el producto $222(a + b + c)$ exceda a 3194, y restamos dicho producto menos 3194, comprobando si el número es el buscado.

$$a + b + c = 15, \qquad 222 \cdot 15 = 3330$$
$$abc = 3330 - 3194 = 136 \text{ pero } 1 + 3 + 6 = 10.$$

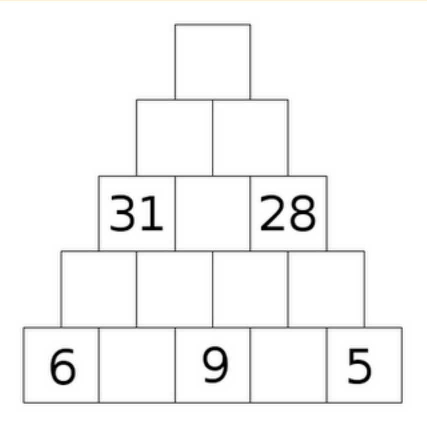
$$a+b+c=16, \qquad 222\cdot 16=3552$$
$$abc=3552-3194=358 \ \text{ y } 3+5+8=16.$$

$$a+b+c=17, \qquad 222\cdot 17=3774$$
$$abc=3774-3194=580 \ \text{ pero } 5+8=13.$$

$$a+b+c=18, \qquad 222\cdot 18=3996$$
$$abc=3996-3194=802 \ \text{ pero } 8+2=10.$$

Para el siguiente valor, $a+b+c=19$, se tiene que $222\cdot 19=4218$, que excede en más de mil a 3194. Por tanto, la única solución es $abc=358$.

Problema 66. *Se construye una pirámide numérica colocando números en la base y situando la suma de dos de ellos consecutivos en la fila superior, en medio de los anteriores. Rellena los cuadros en blanco con números naturales para completar la pirámide numérica de la figura.*



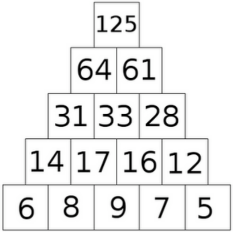
Llamemos x al número que ocupa la casilla central entre el 6 y el 9. Como cada casilla se rellena sumando las dos inferiores, tenemos que

$$31 = 6 + 2x + 9, \qquad x = 8.$$

Del mismo modo, si llamamos y al número que ocupa la casilla entre el 9 y el 5, se tiene que

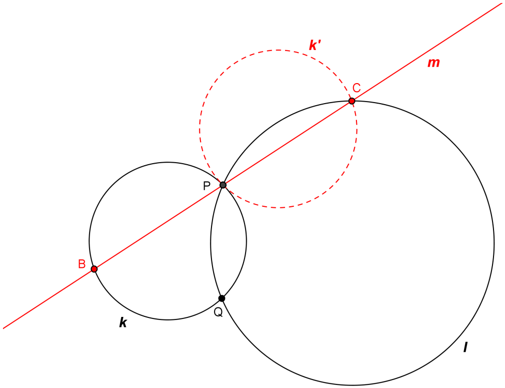
$$28 = 9 + 2y + 5, \qquad y = 7.$$

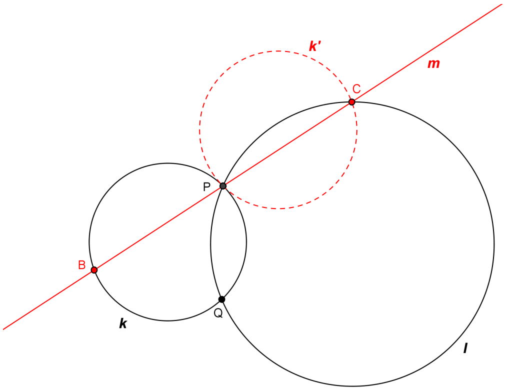
Rellenar las casillas superiores a partir de ahí es sencillo y no requiere más explicación.



Problema 67. *Sean k y l dos circunferencias que se cortan en dos puntos P y Q. Construye la recta m que pasa por P y no contiene a Q, con la propiedad de que si m corta a k en B y P, y m corta a l en C y P, entonces $|PB| = |PC|$.*

Problema 67. *Sean k y l dos circunferencias que se cortan en dos puntos P y Q. Construye la recta m que pasa por P y no contiene a Q, con la propiedad de que si m corta a k en B y P, y m corta a l en C y P, entonces $|PB| = |PC|$.*





Trazar la circunferencia k' simétrica de la circunferencia k respecto del punto P. El punto C de la recta m solución es el punto de intersección distinto de P de las circunferencias k' y l.

Problema 68. *La función g se define sobre los números naturales y satisface, para todo n, las condiciones*

$$g(2) = 1,$$
$$g(2n) = g(n),$$
$$g(2n+1) = g(2n) + 1.$$

Sea n un número natural tal que $1 \leq n \leq 2011$*. ¿Cuál es el valor máximo M de* $g(n)$*? Encuentra también los valores de n que satisfacen la condición* $g(n) = M$*.*

Problema 68. *La función g se define sobre los números naturales y satisface, para todo n, las condiciones*

$$g(2) = 1,$$
$$g(2n) = g(n),$$
$$g(2n+1) = g(2n) + 1.$$

Sea n un número natural tal que $1 \leq n \leq 2011$. ¿Cuál es el valor máximo M de $g(n)$? Encuentra también los valores de n que satisfacen la condición $g(n) = M$.

Dado un número natural n cualquiera, consideramos su representación binaria:

$$n = 2^k a_k + 2^{k-1} a_{k-1} + \ldots + 2a_1 + a_0 = a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_{0\,(2}\,,$$

donde cada $a_j = 0$ o 1. Se puede probar por inducción sobre k que $g(n) = \sum_{j=1}^{k} a_j$:

Para $k = 0$ es cierto: $g(1_{(2}) = g(1) = 1$. Supuesto que sea cierto para $k = \ell \geq 0$, hay dos casos para un número de $\ell + 1$ dígitos en base 2:

$$g(a_\ell \dots a_1 0_{\,(2}) = g(2a_\ell \dots a_{1\,(2}) = \sum_{j=1}^{\ell} a_j\,,$$

$$g(a_\ell \dots a_1 1_{\,(2}) = g(2a_\ell \dots a_{1\,(2} + 1) = 1 + \sum_{j=1}^{\ell} a_j$$

donde se han aplicado las propiedades de g y la hipótesis inductiva. Entonces, $g(n)$ es igual al número de unos que tiene n escrito en base 2.
Como $2^{11} = 2048 > 2011 > 1024 = 2^{10}$, el máximo valor de M será 10. Hay cinco valores de n comprendidos entre 1 y 2011 para los que $g(n) = 10$:

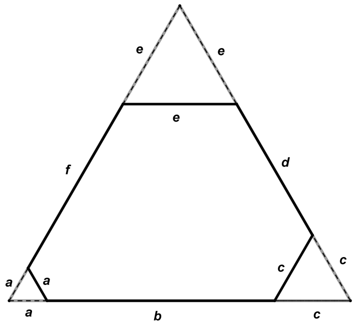
$$1023, \quad 1535, \quad 1791, \quad 1919, \quad 1983.$$

(El siguiente número con 10 unos en base 2 es 2015.)

Problema 69. *¿Cuáles son los valores posibles para el área de un hexágono convexo que tiene todos los ángulos iguales y cuyos lados miden 1, 2, 3, 4, 5 y 6, en algún orden?*

Problema 69. *¿Cuáles son los valores posibles para el área de un hexágono convexo que tiene todos los ángulos iguales y cuyos lados miden 1, 2, 3, 4, 5 y 6, en algún orden?*

Como se sugiere, como el hexágono tiene ángulos interiores de 120°, podemos prolongar los lados hasta formar un triángulo equilátero:



Tenemos $a+b+c+d+e+f=21$ y $\ell = a+b+c = c+d+e = e+f+a$, de donde sale $3\ell = 21+a+c+e$ y, por tanto,

$$\ell = 7 + \frac{a+c+e}{3}\,.$$

El menor valor de la suma $a+c+e$ es 6, y el mayor 15, así que $9 \leq \ell \leq 12$.

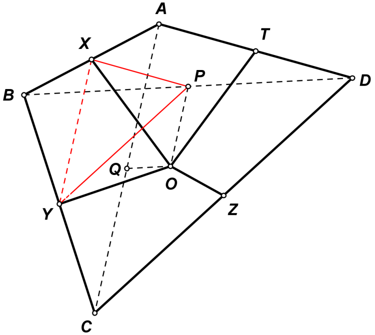
- Si $a+c+e=6$, el único caso posible es $\{a,c,e\}=\{1,2,3\}$ y $\{b,d,f\}=\{4,5,6\}$.
- Si $a+c+e=9$, el único caso posible es $\{a,c,e\}=\{1,3,5\}$ y $\{b,d,f\}=\{2,4,6\}$.
- Si $a+c+e=12$, el único caso posible es $\{a,c,e\}=\{2,4,6\}$ y $\{b,d,f\}=\{1,3,5\}$.
- Si $a+c+e=6$, el único caso posible es $\{a,c,e\}=\{4,5,6\}$ y $\{b,d,f\}=\{1,2,3\}$.

Como el área del triángulo equilátero de lado l es $l^2\sqrt{3}/4$, el área del hexágono será $\left(\ell^2 - (a^2 + c^2 + e^2)\right)\sqrt{3}/4$, y los posibles valores del área son:

- Cuando $a + c + e = 6$, $\ell = 9$ y el área es $67\sqrt{3}/4$.
- Cuando $a + c + e = 9$, $\ell = 10$ y el área es $65\sqrt{3}/4$.
- Cuando $a + c + e = 12$, $\ell = 11$ y el área es $65\sqrt{3}/4$.
- Cuando $a + c + e = 15$, $\ell = 12$ y el área es $67\sqrt{3}/4$.

Problema 70. *$ABCD$ es un cuadrilátero cualquiera, P y Q son los puntos medios de las diagonales BD y AC, respectivamente. Las paralelas por P y Q a la otra diagonal se cortan en O. Si unimos O con los cuatro puntos medios X, Y, Z y T de los lados del cuadrilátero, se forman cuatro cuadriláteros $OXBY$, $OYCZ$, $OZDT$ y $OTAX$. Prueba que estos cuatro cuadriláteros tienen la misma área.*

Problema 70. *$ABCD$ es un cuadrilátero cualquiera, P y Q son los puntos medios de las diagonales BD y AC, respectivamente. Las paralelas por P y Q a la otra diagonal se cortan en O. Si unimos O con los cuatro puntos medios X, Y, Z y T de los lados del cuadrilátero, se forman cuatro cuadriláteros $OXBY$, $OYCZ$, $OZDT$ y $OTAX$. Prueba que estos cuatro cuadriláteros tienen la misma área.*



Al ser OP paralela a AC, los triángulos $\triangle OXY$ y $\triangle PXY$ tienen la misma base y altura, y por tanto la misma área.
De ahí resulta (añadiendo el $\triangle BXY$) que los cuadriláteros $OXBY$ y $PXBY$ también tienen la misma área.
Pero el área del cuadrilátero $PXBY$ es la cuarta parte del área del cuadrilátero inicial $DABC$ al ser semejantes con razón 2 del grande al pequeño.