Curso 2010-11

Problema 1. *Sir Arthur vive en el campo. Todos los días hace lo mismo: va en tren a la ciudad, va a su club, lee el TIMES, almuerza, juega su partida de ajedrez y toma el tren de regreso. Reconoceremos que es una vida tan dura como desordenada. Cada día su fiel chofer Jenkins va a buscarlo a la estación con el parsimonioso Rolls Royce. La tranquilidad de estos parajes hace posible que Jenkins salga todos los días a la misma hora y a la misma velocidad para llegar a la estación en el preciso instante en el que Sir Arthur baja del tren. Seguidamente vuelven a casa a la velocidad de costumbre.*

Pero un día Sir Arthur llegó a la estación una hora antes de lo acostumbrado y, en vez de esperar a Jenkins, se puso a caminar hacia su casa. En el trayecto encontró a su fiel chofer que iba a buscarlo, subió al coche y continuó su regreso al hogar, adonde llegó 30 minutos más temprano de lo habitual. ¿Cuánto tiempo estuvo caminando Sir Arthur?

Pero un día Sir Arthur llegó a la estación una hora antes de lo acostumbrado y, en vez de esperar a Jenkins, se puso a caminar hacia su casa. En el trayecto encontró a su fiel chofer que iba a buscarlo, subió al coche y continuó su regreso al hogar, adonde llegó 30 minutos más temprano de lo habitual. ¿Cuánto tiempo estuvo caminando Sir Arthur?

Sir Arthur estuvo caminando 45 minutos. En efecto, el Rolls Royce demora media hora en hacer el recorrido desde el punto intermedio donde lo recoge hasta la estación y de vuelta al mismo punto. De modo que, para llegar desde el punto de recogida intermedia hasta la estación el coche demora 15 minutos, o sea, 45 minutos después de cuando Sir Arthur llega a la estación una hora antes.

Problema 2. *Sea* $N = 1234567891011\ldots998999$ *el número natural formado al escribir los enteros* $1, 2, 3, \ldots, 999$ *en orden. ¿Cuál es el* 1998*-ésimo dígito contado desde la izquierda? ¿Y el* 2010*-ésimo?*

Problema 2. *Sea* $N = 1234567891011\ldots998999$ *el número natural formado al escribir los enteros* $1, 2, 3, \ldots, 999$ *en orden. ¿Cuál es el* 1998*-ésimo dígito contado desde la izquierda? ¿Y el* 2010*-ésimo?*

$$\left.\begin{array}{l}\text{Del 1 al 9 hay 9 dígitos.}\\ \text{Del 10 al 99 hay 180 dígitos.}\end{array}\right\}$$

Total 189 dígitos.
Del 100 al 702 hay 1809 dígitos. Total, 1998 dígitos. Por tanto, buscamos el tercer dígito de 702. La respuesta es 2.
Del 100 al 706 hay 1821 dígitos. Total, 2010 dígitos. Por tanto, buscamos el tercer dígito de 706. La respuesta es 6.

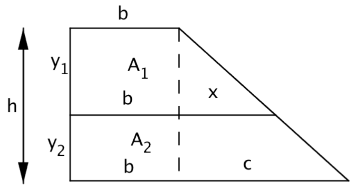
Problema 3. *Las longitudes de las bases de un trapecio rectángulo son a y b. Una recta paralela a las bases divide el trapecio en dos partes de la misma área. La longitud del segmento de dicha recta que queda dentro del trapecio mide z. Prueba que*

$$z^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Problema 3. *Las longitudes de las bases de un trapecio rectángulo son a y b. Una recta paralela a las bases divide el trapecio en dos partes de la misma área. La longitud del segmento de dicha recta que queda dentro del trapecio mide z. Prueba que*

$$z^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Solución 1. Con las notaciones de la figura siguiente (A_1, A_2 son las áreas de los trapecios superior e inferior, $a = b + c$, $z = c + x$, $y_1 + y_2 = h$):



$$\text{Por Thales,} \quad \frac{y_1}{x} = \frac{h}{c} \quad \therefore \quad y_1 = \frac{h}{c}x.$$

Entonces, el doble del área del trapecio superior es $2A_1 = (2b + x)y_1 = \dfrac{2bhx + hx^2}{c}$. Ahora, $A_1 = A_2 \Rightarrow 2A_1 = A_1 + A_2$, es decir,

$$\frac{2bhx + hx^2}{c} = \frac{(2b + c)h}{2}.$$

Dividiendo por h y multiplicando por $2c$,

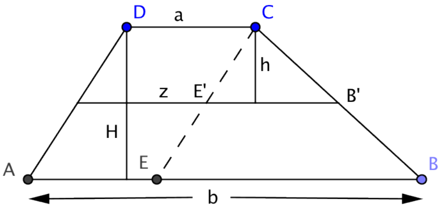
$$2x^2 + 4bx = c^2 + 2cb.$$

Añadiendo en ambos lados $2b^2$,

$$2(b + x)^2 = (b + c)^2 + b^2,$$

es decir, $2z^2 = a^2 + b^2$, lo que se quiere.

Solución 2. Demostración para un trapecio cualquiera:



Por un lado sabemos que

$$\frac{(a+z)h}{2} = \frac{1}{2}\frac{(a+b)H}{2}$$

de donde

$$\frac{H}{h} = \frac{2(a+z)}{a+b}.$$

Si CE paralela a DA, los triángulos CEB y $CE'B'$ son semejantes. Por ello:

$$\frac{H}{h} = \frac{b-a}{z-a}.$$

Igualando las dos expresiones:

$$\frac{2(a+z)}{a+b} = \frac{b-a}{z-a}$$

de donde $2z^2 = a^2 + b^2$, c.q.d.

Problema 4. *Demuestra que* $M = 7^{2n+1} + 15^{2n+1}$ *es divisible por* 22 *para todos los* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. *¿Para qué valores de* n *es* M *divisible por* 44*? ¿Para qué valores de* n *es* M *divisible por* 66*?*

Problema 4. *Demuestra que* $M = 7^{2n+1} + 15^{2n+1}$ *es divisible por* 22 *para todos los* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*. ¿Para qué valores de* n *es* M *divisible por* 44*? ¿Para qué valores de* n *es* M *divisible por* 66*?*

El caso $n = 0$ es claro.
Recordemos: $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$.
En general,

$$(x^{2n+1} + 1) = (x+1)(x^{2n} - x^{2n-1} + \cdots + (-1)^{2n}).$$

Del mismo modo,

$$(x^{2n+1} + y^{2n+1}) = (x+y)(x^{2n} - x^{2n-1} \cdot y + \cdots + (-1)^{2n} y^{2n}).$$

Por lo tanto,

$$M = (7+15)(7^{2n} - 7^{2n-1}\cdot 15 + \cdots + (-1)^{2n}15^{2n}),$$

que es divisible por 22 para $n > 0$.
Sea $E = (7^{2n} - 7^{2n-1}\cdot 15 + \cdots + (-1)^{2n}15^{2n})$. E es la suma de un número impar $(2n+1)$ de números impares. Así, E es impar y por tanto M no puede ser divisible por 44 para ningún n.
De lo anterior, $E = 7^{2n} + 15k$, con lo que E es divisible por 3 cuando 7^{2n} lo es, es decir, nunca.

Problema 5. *Los números positivos* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *son términos sucesivos de una progresión aritmética. Demuestra que*

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}.$$

Problema 5. *Los números positivos* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *son términos sucesivos de una progresión aritmética. Demuestra que*

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+ \cdots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}.$$

Sea d la diferencia de la progresión aritmética; entonces

$$\frac{1}{\sqrt{a_j}+\sqrt{a_{j+1}}} = \frac{\sqrt{a_j}-\sqrt{a_{j+1}}}{a_j - a_{j+1}} = \frac{\sqrt{a_j}-\sqrt{a_{j+1}}}{d}.$$

Así,

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_n}}{d}$$

que es igual a $\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}$ porque

$$a_n = a_1 + d(n-1).$$

Problema 6. *¿Puede un número a que consta de* 600 *cifras* 6 *y algunos ceros ser un cuadrado?*

Problema 6. *¿Puede un número a que consta de 600 cifras 6 y algunos ceros ser un cuadrado?*

$a = b \cdot 10^k$, con b terminado en 6 y por tanto $b \neq \dot{5}$.
Para que a sea cuadrado debe ser k par, por tanto b debe ser un cuadrado.
$\frac{b}{2}$ es un número formado por treses y ceros terminado en tres, luego no es múltiplo de 2 y b es múltiplo de 2 pero no de 4, por tanto no es un cuadrado.