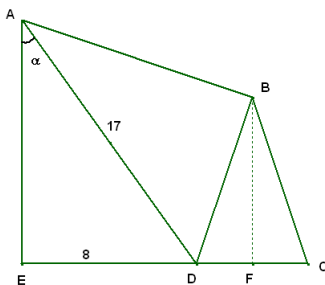


59. En la figura adjunta, los triángulos AED y ADB son rectángulos y simétricos respecto del lado común AD ; además, $BD = BC$, donde C es un punto en la prolongación del segmento ED . Calcular el área exacta del $\triangle BDC$ a partir de los datos $ED = 8$ cm., $AD = 17$ cm. (*Sugerencia:* Trigonometría: fórmulas de ángulo doble.)

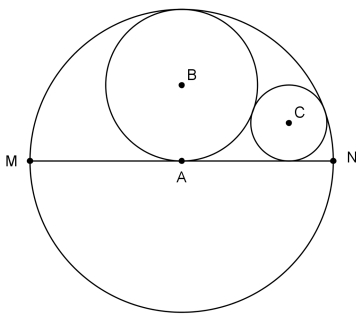


60. De entre los $2n$ números $1, 2, 3, \dots, 2n$ se eligen de cualquier forma $n+1$ números distintos. Demostrar que entre los números elegidos, (a) hay por lo menos dos que son primos entre sí; (b) hay por lo menos dos tales que uno divide al otro. (*Sugerencia:* Principio del palomar. (a) Dos números consecutivos son primos entre sí. (b) Todo número natural es el producto de una potencia de 2 por un número impar.)

61. Calcular la parte entera de $S = \sum_{k=1}^{10000} \frac{1}{\sqrt{k}}$. (*Sugerencia:* $2\sqrt{k} < \sqrt{k} + \sqrt{k+1}$, etc.)

62. Demostrar que, para todo entero positivo n , el número $2^{2^n} - 1$ es divisible por al menos n números primos distintos. (*Sugerencia:* Inducción.)

63. El segmento MN es un diámetro de la circunferencia de centro A y radio r . Las circunferencias pequeñas de centros B y C son tangentes entre sí, tangentes al diámetro MN y tangentes interiormente a la circunferencia grande. Hallar el radio de la circunferencia de centro C . (*Sugerencia:* Fórmula de Herón.)



64. En vista de que llega la Navidad, Papá Noel decide contratar a un par de compañías de renos para que le ayuden en su trabajo de reparto: “El reno rojo” y “El reno azul”. Estas compañías tienen que hacer su labor de transporte en 5 ciudades distintas, y se han de organizar de tal manera que, entre las dos, cubran todos los posibles caminos que conectan dos ciudades distintas. Para evitar competencias desleales, cada conexión

entre dos ciudades es cubierta sólomente por los renos de una sola compañía. Prueba que siempre habrá, o bien un triángulo conectado por los renos de una misma compañía, o bien un circuito pentagonal conectado por los renos de una misma compañía.