

38. Tenemos un cubo de madera de cerezo, compuesto por 27 cubitos iguales: el cubito interior, 8 “cubitos-vértice”, 12 “cubitos-arista” y 6 “cubitos-cara”. Y una termita que pretende llegar lo más rápido posible al centro del cubito interior pasando antes por los centros de los otros 26 cubitos, entrando al cubo por el centro de la cara exterior de un “cubito-cara” y recorriendo un camino que esté compuesto por tramos rectilíneos paralelos siempre a las aristas del cubo. ¿Logrará la termita su propósito?
39. Quitando los “seises”, un juego de dominó tiene 21 fichas, desde “blanca doble” a “cinco doble”. ¿Se pueden colocar esas 21 fichas sobre la mesa una tras otra siguiendo la regla de emparejamiento del dominó?
40. Probar que
$$\sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}} = \frac{n(n+2)}{n+1}.$$
41. (a) Demuestra que, en una reunión de 6 personas hay, o bien tres que son mutuamente conocidas, o bien tres que se ven por primera vez. Dicho de otro modo: se trazan todos los lados y las diagonales de un hexágono y se pinta, cada uno de los segmentos trazados, de color rojo o de color verde. Demuestra que, se haga como se haga, siempre habrá un triángulo “monocromático”, es decir, un triángulo que tenga los tres lados pintados del mismo color.
- (b) Se trazan todos los lados y las diagonales de un polígono de 17 lados y se pinta, cada uno de los segmentos trazados, de rojo, azul o verde. Demuestra que deberá haber un triángulo monocromático.
42. Sea $p > 5$ un número primo. Prueba que el número $11 \dots 1$ formado por $p - 1$ unos es múltiplo de p .
43. Construir un triángulo (a) conocidas las longitudes de las tres medianas, (b) conocidas las longitudes de las tres alturas.
44. Una figura plana se llama *convexa* si contiene completamente el segmento que une dos puntos cualquiera de la figura. Sean cuatro figuras convexas planas tales que cada tres de ellas tienen al menos un punto común. Probar que entonces las cuatro figuras tienen al menos un punto común.