

Seminario de problemas. Curso 2010-11. Hoja 3

16. Hace 10 años las edades de Ximena, Yolanda y Zoe estaban en la relación 1 : 2 : 5. Hoy las edades de Ximena y Yolanda están en la relación 6 : 7. ¿Cuál es la edad actual de Zoe?

17. Demostrar que ambas raíces de la ecuación $x^2 + x + 1 = 0$ satisfacen

$$x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2} = 0,$$

donde m, n, p son enteros.

18. ¿Para qué valores enteros de x e y es $x^2 - y^2$ divisible por 4?

19. Hallar el resto al dividir por 7 del número $5555^{2222} + 2222^{5555}$.

20. Un triángulo equilátero ABC está inscrito en una circunferencia. Sea P un punto cualquiera del arco pequeño AB . Probar que $PC = PA + PB$.

21. Dibujemos la circunferencia inscrita en un triángulo ABC . Sea MN el diámetro perpendicular al lado AC , donde N es el punto que está en AC . Sea L el punto de intersección de las rectas BM y AC . Probar que $AN = LC$.

22. Demuestra que $\frac{1}{10\sqrt{2}} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{99}{100} < \frac{1}{10}$. Generaliza estas estimaciones para el producto $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n}$.

23. A las 9^h a.m. sale un ciclista desde A hacia B . A las 11^h a.m. sale un auto desde A hacia B que alcanza al ciclista no más tarde de las 12^h. El auto llega a B y vuelve de inmediato hacia A . Por el camino, el auto encuentra al ciclista no más de 3^h después del primer encuentro y llega a A a las 5^h p.m. del mismo día. ¿A qué hora llega el ciclista a B ?