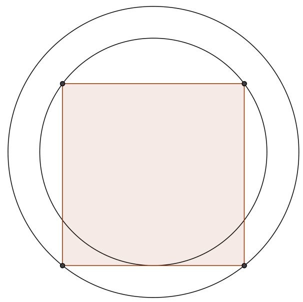
Seminario de problemas. Curso 2010-11. Hoja 11

71. En una corona circular se inscribe un cuadrado de modo que uno de sus lados es tangente a la circunferencia menor (de radio r) y tiene sus dos vértices en la circunferencia mayor (de radio R). El lado paralelo al anterior tiene sus dos vértices en la circunferencia menor. Hallar la razón R/r.



72. Demostrar que $\forall n \in \mathbb{N},\ \sqrt[n]{n} < 1 + \dfrac{2}{\sqrt{n}}$.

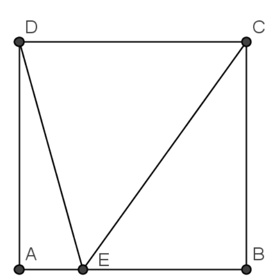
73. Sean a, b números reales tales que la ecuación $x^4 + ax^3 + 2x^2 + bx + 1 = 0$ tiene una solución real; demostrar que

$$a^2 + b^2 \geq 8.$$

74. a) En un cuadrado de lado unidad, tomamos el punto medio de uno de los lados, y lo unimos con los vértices del lado opuesto, formando un triángulo isósceles. Tomamos un punto arbitrario en uno de los lados del triángulo. Sean d_1, d_2 y d_3, respectivamente, las distancias del punto a los tres lados del cuadrado que no coinciden con un lado del triángulo. Demostrar que una de las distancias es la suma de las otras dos.

b) Sea el cuadrado $ABCD$ de la figura, de lado unidad, y sea a la distancia AE. Tomamos un punto arbitrario en el lado EC del triángulo. Sean d_1, d_2 y d_3, respectivamente, las distancias de ese punto a los lados AB, BC y DA del cuadrado. Probar que

$$d_3 = d_1 + d_2 \left(\frac{a}{1-a} \right).$$



75. Considérese la sucesión definida como $a_1 = 3$, y $a_{n+1} = a_n + a_n^2$. Determínense las dos últimas cifras de a_{2011}.

76. Un hexágono está inscrito en una circunferencia de radio r. Dos de sus lados tienen longitud 1, dos tienen longitud 2, y los otros dos longitud 3. Prueba que r es una raíz de la ecuación $2r^3 - 7r - 3 = 0$.