Seminario de problemas. Curso 2019-20

Recurrencias: Soluciones de las Actividades propuestas

Actividad 1.

(a) Encuentra el término general y la suma S_m de la progresión aritmética de tercer orden que comienza

$$1,\ -3,\ -7,\ 1,\ 33,\ 101,\ 217,\ 393,\ \ldots$$

(b) La sucesión $A(n)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ cumple $(\Delta^4 A)(n) = 24$ para todo n. Completando la siguiente tabla de diferencias, obtén los términos $A(1)$, …, $A(10)$. Calcula también la expresión general de $A(n)$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$A(n)$	0										
$(\Delta A)(n)$	0										
$(\Delta^2 A)(n)$	0										
$(\Delta^3 A)(n)$	-6										
$(\Delta^4 A)(n)$	24	24									

(c) Sea $k \geq 1$ un entero fijo. Denotamos $n^{(k} = n(n-1)\cdots(n-k+1)$, $n^{(0} = 1$.

i) Prueba la fórmula $\Delta n^{(k} = k n^{(k-1}$.

ii) Halla los coeficientes A, B, C, D, E de la siguiente identidad en la variable n:

$$n^4 = An^{(4} + Bn^{(3} + Cn^{(2} + Dn + E.$$

iii) Usando los dos apartados anteriores, encuentra los valores de las diferencias iniciales sucesivas de la sucesión (n^4).

iv) Usando el apartado anterior, o de otro modo, prueba:

$$1^4 + 2^4 + \ldots + n^4 = \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1).$$

Soluciones.

1(a). Resulta la siguiente tabla de diferencias:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
a_1 = \mathbf{1} & & -3 & & -7 & & 1 & & 33 & & 101 & & 217 & & 393 & & \ldots \\
& \mathbf{-4} & & -4 & & 8 & & 32 & & 68 & & 116 & & 176 & & \ldots & \\
& & \mathbf{0} & & 12 & & 24 & & 36 & & 48 & & 60 & & \ldots & & \\
& & & \mathbf{12} & & 12 & & 12 & & 12 & & 12 & & \ldots & & &
\end{array}$$

Término general:

$$a_n = 1 - 4(n-1) + 12\binom{n-1}{3} = 1 - 4(n-1) + 2(n-1)(n-2)(n-3) = 2n^3 - 6n^2 + 1.$$

Suma $S_m = a_1 + \ldots + a_m$:

$$\begin{aligned} S_m &= 1\binom{m}{1} - 4\binom{m}{2} + 12\binom{m}{4} \\ &= \frac{1}{2}m^2(m^2 - 6m + 7). \end{aligned}$$

1(b). Se va rellenando de abajo arriba: con un esquema matricial, el número que ocupa la casilla (fila i, columna j) se obtiene por la regla $a_{ij} = a_{i+1,j-1} + a_{i,j-1}$.

Tabla final:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$A(n)$	0	0	0	-6	0	60	240	630	1344	2520	4320
$(\Delta A)(n)$	0	0	-6	6	60	180	390	714	1176	1800	2610
$(\Delta^2 A)(n)$	0	-6	12	54	120	210	324	462	624	810	1020
$(\Delta^3 A)(n)$	-6	18	42	66	90	114	138	162	186	210	234
$(\Delta^4 A)(n)$	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24

Término general:

$$\begin{aligned} A(n) &= -6\binom{n}{3} + 24\binom{n}{4} = n(n-1)(n-2)(n-3) - n(n-1)(n-2) \\ &= n(n-1)(n-2)(n-4) = n^4 - 7n^3 + 14n^2 - 8n. \end{aligned}$$

1(c). i) Para $k = 1$, $\Delta n^{(1} = (n+1)^{(1} - n^{(1} = (n+1) - n = 1 = n^{(0}$. Si $k > 1$,

$$\begin{aligned} \Delta n^{(k} = (n+1)^{(k} - n^{(k} &= (n+1)n(n-1)\cdots(n-k+2) - n(n-1)\cdots(n-k+1) \\ &= n(n-1)\cdots(n-k+2)\big(n+1-(n-k+1)\big) \\ &= kn(n-1)\cdots\big(n-(k-1)+1\big) = kn^{(k-1}. \end{aligned}$$

ii) Se propone la siguiente identidad de polinomios en n:

$$n^4 = An(n-1)(n-2)(n-3) + Bn(n-1)(n-2) + Cn(n-1) + Dn + E$$

- Coeficientes de n^4: $A = 1$
- $n = 0$: $E = 0$
- $n = 1$: $D + E = 1$, $D = 1$
- $n = 2$: $2C + 2D + E = 16$, $2C + 2 = 16$, $C = 7$
- $n = 3$: $6B + 6C + 3D + E = 81$, $6B + 45 = 81$, $B = 6$

iii) Se tiene, entonces, $n^4 = n^{(4} + 6n^{(3} + 7n^{(2} + n$. Pongamos ahora para facilitarnos la notación $n^4 = a_n$. Usando i) calculamos diferencias sucesivas y evaluamos en $n = 1$:

$$
\begin{aligned}
\Delta a_n &= 4n^{(3} + 18n^{(2} + 14n + 1 & \Delta a_1 &= 15\\
\Delta^2 a_n &= 12n^{(2} + 36n + 14 & \Delta^2 a_1 &= 50\\
\Delta^3 a_n &= 24n + 36 & \Delta^3 a_1 &= 60\\
\Delta^4 a_n &= 24 & \Delta^4 a_1 &= 24\\
\Delta^5 a_n &= 0
\end{aligned}
$$

iv) Finalmente podemos usar la fórmula para la suma de términos de una progresión aritmética de orden 4; tenemos $a_1 = 1^4 = 1$:

$$
\begin{aligned}
1^4 + 2^4 + \ldots + n^4 &= \binom{n}{1} + 15\binom{n}{2} + 50\binom{n}{3} + 60\binom{n}{4} + 24\binom{n}{5}\\
&= n + \frac{15}{2}n(n-1) + \frac{25}{3}n(n-1)(n-2) + \frac{5}{2}n(n-1)(n-2)(n-3)\\
&\qquad + \frac{1}{5}n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\\
&= \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)
\end{aligned}
$$

Actividad 2.

(a) Resuelve la recurrencia $b_0 = 0$, $b_{n+1} = b_n + a_n$, si a_n es la sucesión definida por $a_1 = 98000$, $10a_{n+1} - 11a_n + 120000 = 0$.

(b) Resuelve, con las técnicas de esta segunda sección, la ecuación en diferencias $\Delta^2 a_n = 3$ con los datos iniciales $a_1 = 1$, $\Delta a_1 = 2$.

(c) Resuelve la recurrencia $a_0 = 6$, $a_1 = -8$, $a_n + a_{n-1} - 6a_{n-2} = 5 \cdot 2^n + 4$ si $n \geq 2$.

(d) Con letras A o B formamos palabras de n letras. ¿Cuántas de estas palabras no tienen dos letras B juntas?

Soluciones.

2(a). La sucesión a_n es del modelo de crecimiento mixto aritmético-geométrico $a_{n+1} = ra_n + d$, y podríamos calcular directamente la expresión explícita del término general a partir de la fórmula vista en las notas ($r = 11/10$, $d = -12000$):

$$
\begin{aligned}
a_n = a_1 r^{n-1} + \frac{r^{n-1}-1}{r-1}\,d &= 98000\Big(\frac{11}{10}\Big)^{n-1} - 120000\Big(\Big(\frac{11}{10}\Big)^{n-1} - 1\Big)\\
&= 120000 - 22000\Big(\frac{11}{10}\Big)^{n-1}.
\end{aligned}
$$

También podemos conseguirlo de otro modo: restando las ecuaciones

$$
\begin{cases}
10a_{n+1} - 11a_n + 120000 = 0\\
10a_{n+2} - 11a_{n+1} + 120000 = 0
\end{cases}
$$

resulta la ecuación $10a_{n+2}-21a_{n+1}+11a_n = 0$, lineal homogénea de coeficientes constantes y de ecuación característica $10r^2 - 21r + 11 = 0$, con soluciones $r_1 = 1$, $r_2 = 11/10$. De modo que su solución general es

$$a_n = A + B\Big(\frac{11}{10}\Big)^n.$$

Para $n = 0$ y $n = 1$ tenemos $a_0 = 100000$, $a_1 = 98000$, de donde

$$\begin{cases} A + B = 100000 \\ A + \frac{11}{10}B = 98000 \end{cases}$$

por tanto $B = -20000$, $A = 120000$ y con eso

$$a_n = 120000 - 20000\Big(\frac{11}{10}\Big)^n.$$

Por su parte, la sucesión b_n cumple $\Delta b_n = a_n$ para todo n, luego finalmente, aplicando la fórmula para la suma de una progresión geométrica tenemos

$$\begin{aligned} b_n &= b_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \Delta b_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \\ &= 120000n - 20000 \sum_{k=0}^{n-1} \Big(\frac{11}{10}\Big)^k \\ &= 120000n - 200000\Big(\Big(\frac{11}{10}\Big)^n - 1\Big). \end{aligned}$$

2(b). La solución con la técnica de la primera sección nos haría simplemente poner

$$a_n = 1 + 2\binom{n-1}{1} + 3\binom{n-1}{2} = 1 + 2(n-1) + \frac{3}{2}(n-1)(n-2) = \frac{3}{2}n^2 - \frac{5}{2}n + 2.$$

Veamos que con las técnicas de la segunda sección obtenemos lo mismo (con muchísimo más trabajo, desde luego). La ecuación $\Delta^2 a_n = a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 3$ es de segundo orden lineal no homogénea. La ecuación homogénea tiene ecuación característica $r^2-2r+1 = 0$, o $(r-1)^2 = 0$, con raíz $r = 1$ doble. La solución general de la homogénea es, por consiguiente (ya que $1^n = 1$ para todo n)

$$a_n^h = A + Bn.$$

De acuerdo con la regla dada en las notas, dado que el término independiente de la ecuación no homogénea es una constante (un polinomio de grado 0) multiplicada por 1^n, proponemos una solución particular de la ecuación no homogénea de la forma $a_n^p = Cn^2$.

Ahora, $Cn^2 = Cn(n-1) + Cn = Cn^{(2} + Cn$ según la notación de la Actividad 1(c), y así $\Delta(Cn^2) = 2Cn + C$, $\Delta^2(Cn^2) = 2C$. Luego $2C = 3$, $C = 3/2$. La solución particular es $a_n^p = \frac{3}{2}n^2$, y la solución general de la ecuación no homogénea es

$$a_n = A + Bn + \frac{3}{2}n^2.$$

La sustitución de las condiciones $a_1 = 1$, $\Delta a_1 = 2$ da el sistema

$$\begin{cases} A + B = -\frac{1}{2} \\ B + 3 + \frac{3}{2} = 2 \end{cases}$$

por tanto $A = 2$, $B = -\frac{5}{2}$ y finalmente $a_n = 2 - \frac{5}{2}n + \frac{3}{2}n^2$, la misma expresión que antes.

2(c). La ecuación característica asociada a la ecuación homogénea $a_n + a_{n-1} - 6a_{n-2} = 0$ tiene raíces -3 y 2. Por tanto, la solución general de la ecuación homogénea es

$$a_n^h = A(-3)^n + B2^n.$$

Pasamos ahora a buscar una solución particular de la recurrencia no homogénea. A la vista del término independiente (combinación de potencias de 2 y de 1) y teniendo en cuenta que 2 es una raíz de la ecuación característica, buscamos una solución particular de la forma

$$a_n^p = Cn2^n + D.$$

Sin más que sustituir en la recurrencia, se obtiene que

$$10C2^{n-2} - 4D = 5 \cdot 2^n + 4.$$

Así, tomando $C = 2$ y $D = -1$ obtenemos una solución particular $a_n^p = n2^{n+1} - 1$. En consecuencia, la solución general es

$$a_n = -1 + A(-3)^n + (B + 2n)2^n.$$

Imponiendo las condiciones iniciales,

$$6 = a_0 = -1 + A + B, \quad -8 = a_1 = 3 - 3A + 2B$$

se obtiene $A = 5$ y $B = 2$. Por lo tanto,

$$a_n = -1 + 5(-3)^n + (n + 1)2^{n+1}.$$

2(d). Llamamos $f(n)$ al número de palabras de n letras A o B que no tienen dos letras B seguidas (n*-palabras sinBB*). Tenemos $f(1) = 2$ (palabras 'A' y 'B') y $f(2) = 3$ (palabras 'AA', 'AB' y 'BA'). Podemos establecer una ley de recurrencia para $f(n)$ con el siguiente razonamiento:

Si $n \geq 3$, una n-palabra sinBB

- o bien acaba en A, y entonces las $n - 1$ letras anteriores tienen que formar una $(n - 1)$-palabra sinBB,
- o bien acaba en B; entonces la penúltima letra tiene que ser una A, y las $n-2$ letras anteriores forman una $(n - 2)$-palabra sinBB.

Hay una biyección entre el conjunto de las n-palabras sinBB y la unión de los conjuntos de $(n - 1)$-palabras sinBB y de $(n - 2)$-palabras sinBB. De aquí, la recurrencia $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$, la recurrencia de la interesante *sucesión de los números de Fibonacci.*

La recurrencia es de segundo orden, lineal, de coeficientes constantes y homogénea. La ecuación característica es

$$r^2 - r - 1 = 0,$$

con las dos soluciones reales $r = (1 \pm \sqrt{5})/2$. La solución general de la recurrencia es entonces

$$f(n) = A\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n + B\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n.$$

Los coeficientes A y B se determinan a partir de dos términos iniciales de la sucesión. Si nos quedamos por ejemplo con $f(0) = 1$ y $f(1) = 2$, llegamos al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} A + B = 1, \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)A + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)B = 2. \end{cases}$$

Sustituyendo la primera ecuación en la segunda obtenemos $A - B = 3/\sqrt{5}$, y ya con esto

$$A = \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}, \qquad B = -\frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}.$$

Por tanto, el número de n-palabras sinBB es

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n - \frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^{n+2} - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^{n+2}\right), \end{aligned}$$

donde hemos usado $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2} = \frac{6\pm2\sqrt{5}}{4} = \big(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\big)^2$. De hecho $f(n) = F_{n+2}$, donde los F_n son los números de Fibonacci $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_2 = 2$, $\ldots$.