Seminario de problemas. Curso 2019-20. Estrategias matemáticas: Recurrencias

1. Diferencias sucesivas. Progresiones aritméticas de orden k

A partir de una sucesión de números $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ formamos la sucesión de *diferencias primeras*, $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$, la sucesión de *diferencias segundas*, $\Delta^2 a_n = \Delta(\Delta a_n) = \Delta a_{n+1} - \Delta a_n = a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, etc. Sería más claro escribir $a(n)$, $(\Delta a)(n)$, $(\Delta^2 a)(n)$, etc. para a_n, Δa_n, $\Delta^2 a_n$, etc., pero la notación de subíndices ahorra muchos paréntesis. Las sucesiones de diferencias sucesivas se pueden disponer de modo práctico en la forma siguiente (pero también en forma de tabla rectangular ordinaria):

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
\boldsymbol{a_1} & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & \ldots & & & & \boldsymbol{a_n} & & a_{n+1} & & \ldots \\
& \boldsymbol{\Delta a_1} & & \Delta a_2 & & \Delta a_3 & & \ldots & & & \Delta a_{n-1} & & & \Delta a_n & & \ldots & \\
& & \boldsymbol{\Delta^2 a_1} & & \Delta^2 a_2 & & \ldots & & \Delta^2 a_{n-2} & & & & \Delta^2 a_{n-1} & & \ldots & & \\
& & & \ldots & & & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

Por ejemplo, tenemos

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \ldots + (a_n - a_{n-1}) \\ &= a_1 + \Delta a_1 + \Delta a_2 + \ldots + \Delta a_{n-1} \end{aligned} \tag{1}$$

y así, si se cumple $\Delta a_m = \Delta a_1 = d$ constante para todo m, la sucesión (a_n) se llama una *progresión aritmética* de *diferencia* d. En este caso, como sabemos bien,

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

En otro caso podríamos dar en (1) un paso más:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \Delta a_1 + \Delta a_2 + \ldots + \Delta a_{n-1} \\ &= a_1 + \Delta a_1 + (\Delta a_1 + \Delta^2 a_1) + (\Delta a_1 + \Delta^2 a_1 + \Delta^2 a_2) + \ldots + (\Delta a_1 + \Delta^2 a_2 + \ldots + \Delta^2 a_{n-2}) \\ &= a_1 + (n-1)\Delta a_1 + (n-2)\Delta^2 a_1 + (n-3)\Delta^2 a_2 + \ldots + 2\Delta^2 a_{n-3} + \Delta^2 a_{n-2} \end{aligned}$$

y así, si se cumple $\Delta^2 a_m = \Delta^2 a_1 = d$, constante para todo m, la sucesión (a_n) se llama una *progresión aritmética de segundo orden*, y tenemos la expresión

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)\Delta a_1 + \Big[(n-2) + (n-3) + \ldots + 2 + 1\Big] d \\ &= a_1 + (n-1)\Delta a_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} d \\ &= a_1 + \binom{n-1}{1}\Delta a_1 + \binom{n-1}{2} d. \end{aligned} \tag{2}$$

Se demuestra por inducción la siguiente fórmula, que da el **término general de una progresión aritmética de orden $\boldsymbol{k}$** ≥ 1, es decir, una sucesión para la que $\Delta^k a_m = \Delta^k a_1 = d$ es constante para todo m. Es el siguiente polinomio de grado k en la letra n:

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + \binom{n-1}{1}\Delta a_1 + \binom{n-1}{2}\Delta^2 a_1 + \ldots + \binom{n-1}{k} d}. \tag{3}$$

Una fórmula para la **suma** $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ **de los** $\boldsymbol{n}$ **primeros términos de una progresión aritmética de orden** $\boldsymbol{k}$ se obtiene considerando que $a_n = \Delta S_n$, de modo que la sucesión $S_0 = 0$, $S_1 = a_1$, $S_2, \ldots$ es la primera fila de una tabla de diferencias sucesivas como ésta:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
S_0 = \mathbf{0} & & S_1 & & & & S_2 & & S_3 & & \ldots & & S_{n-1} & & \boldsymbol{S_n} \\
& \Delta S_0 = \boldsymbol{a_1} & & & a_2 & & & a_3 & & \ldots & & a_{n-1} & & a_n \\
& & \Delta^2 S_0 = \boldsymbol{\Delta a_1} & & & & \Delta a_2 & & \ldots & & \Delta a_{n-2} & & \Delta a_{n-1} \\
& & & & \Delta^3 S_0 = \boldsymbol{\Delta^2 a_1} & & & \ldots & & \Delta^2 a_{n-3} & & \Delta^2 a_{n-2} \\
& & & & & & \ldots
\end{array}
$$

y vemos entonces que la sucesión (S_n) $n = 0, 1, 2, \ldots$ es una progresión aritmética de orden $k+1$. Podemos usar la fórmula (3) (con la apropiada traslación de índice) y tenemos

$$\boldsymbol{S_n} = \binom{n}{1}\boldsymbol{a_1} + \binom{n}{2}\boldsymbol{\Delta a_1} + \boldsymbol{\ldots} + \binom{n}{k+1}\boldsymbol{d}. \tag{4}$$

Cuando $k = 1$ (en este caso $\Delta a_1 = d$) la fórmula (4) da la expresión conocida para la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética de diferencia d:

$$S_n = \binom{n}{1}a_1 + \binom{n}{2}d = \frac{n}{2}\big(2a_1 + (n-1)d\big) = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

Pero, por ejemplo, $a_n = n^2$ es el término general de una progresión aritmética de segundo orden. Tenemos $a_1 = 1$, $\Delta a_1 = 3$ y $\Delta^2 a_m = 2$ para todo $m \geq 1$. Usando (4) obtenemos

$$
\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 &= n + 3\binom{n}{2} + 2\binom{n}{3} \\
&= n + \frac{3}{2}n(n-1) + \frac{1}{3}n(n-1)(n-2) \\
&= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).
\end{aligned}
$$

Actividad 1.

(a) Encuentra el término general y la suma S_m de la progresión aritmética de tercer orden que comienza

$$1,\ -3,\ -7,\ 1,\ 33,\ 101,\ 217,\ 393,\ \ldots$$

(b) La sucesión $A(n)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ cumple $(\Delta^4 A)(n) = 24$ para todo n. Completando la siguiente tabla de diferencias, obtén los términos $A(1), \ldots, A(10)$. Calcula también la expresión general de $A(n)$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$A(n)$	0										
$(\Delta A)(n)$	0										
$(\Delta^2 A)(n)$	0										
$(\Delta^3 A)(n)$	-6										
$(\Delta^4 A)(n)$	24	24									

(c) Sea $k \geq 1$ un entero fijo. Denotamos $n^{(k} = n(n-1)\cdots(n-k+1)$, $n^{(0} = 1$.

   i) Prueba la fórmula $\Delta n^{(k} = kn^{(k-1}$.

   ii) Halla los coeficientes A, B, C, D, E de la siguiente identidad en la variable n:

$$n^4 = An^{(4} + Bn^{(3} + Cn^{(2} + Dn + E.$$

   iii) Usando los dos apartados anteriores, encuentra los valores de las diferencias iniciales sucesivas de la sucesión (n^4).

   iv) Usando el apartado anterior, o de otro modo, prueba:

$$1^4 + 2^4 + \ldots + n^4 = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1).$$

---

2. Recurrencias

Una sucesión (a_n) (o $(a(n))$) puede definirse mediante una *fórmula explícita* que da el término general en función de n, por ejemplo $a_n = \frac{1+(-1)^n}{2}\,n$. Aquí, $a_{63} = 0$, $a_{64} = 64$, etc. O bien, $b_n = n^2 + \frac{1}{120}n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$, cuyos primeros términos son 1, 4, 9, 16, 26, 42, etc.

Otra posibilidad es definir la sucesión, una vez fijado el valor de algunos de sus términos iniciales, mediante una *recurrencia*, *ley* o *relación de recurrencia*, es decir, mediante una ecuación que liga funcionalmente un término de la sucesión con uno o varios de los términos anteriores. A partir de ahí a veces puede ser fácil encontrar el término general. Por ejemplo, si $a_0 = 1$ y $a_{n+1} = (n+1)a_n$ para $n \geq 0$, es $a_n = n!$.

Otras veces no será tan sencillo: para la sucesión definida por $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ y $a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n$ si $n \geq 1$, los primeros términos son 1, 2, 5, 13, 34, etc., pero de entrada no podemos dar el valor del término a_{63} si no hemos calculado todos los anteriores. Conseguir la expresión explícita de a_n en función de n es *resolver la recurrencia*.

Con las notaciones de la sección anterior, $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$ etc., la recurrencia $a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n$ se podría reescribir como $\Delta^2 a_n = \Delta a_n + a_n$, y en esta segunda forma se puede llamar una *ecuación en diferencias*. Por eso se habla indistintamente de recurrencias o de ecuaciones en diferencias, aunque lo usual es manejarlas en la primera de estas formas.

Con mayor generalidad (y dificultad) se pueden considerar y estudiar recurrencias para sucesiones dobles a_{nk}. Por ejemplo, la sucesión de los números combinatorios $C(n,k) = \binom{n}{k}$ queda definida, para todo $n \geq 0$ y $k \geq 0$, por las condiciones $C(n,0) = 1$ para todo $n \geq 0$, $C(n,k) = 0$ para todo $k > n$ y la recurrencia $C(n+1,k+1) = C(n,k+1) + C(n,k)$.

Una *recurrencia lineal de* ***primer orden*** *con coeficientes constantes* tiene la forma

$$a_{n+1} = ra_n + d_n \quad (n \geq 0),$$

con $r \neq 0$. La sucesión incógnita es (a_n), los coeficientes constantes son los números 1 y r, y (d_n) es una sucesión fija dada. En un problema concreto se va a suponer conocido el primer término a_0. Si nos limitamos a considerar que d_n sea una sucesión constante, tenemos la recurrencia

$$a_{n+1} = ra_n + d \quad (n \geq 0), \tag{5}$$

que es la ecuación de un **modelo de crecimiento mixto** aritmético-geométrico.

- Si $d = 0$ la ley de recurrencia es $a_{n+1} = ra_n$, que define una *progresión geométrica* de *razón* r. Se tiene $a_n = a_0 r^n$. Si $r \neq 1$, la suma de los n primeros términos es $S_n = \frac{a_0(r^{n+1}-1)}{r-1}$.
- Si $r = 1$ se trata de una progresión aritmética de diferencia d, y $a_n = a_0 + nd$.
- En el caso general $d \neq 0$, $r \neq 1$, se obtiene por inducción la siguiente expresión para el término general:
$$a_n = a_0 r^n + \frac{r^n - 1}{r - 1}\, d. \tag{6}$$

Una *recurrencia lineal de* ***segundo orden*** *con coeficientes constantes* tiene la forma

$$a_{n+2} = c_1 a_{n+1} + c_2 a_n + d_n \quad (n \geq 0), \tag{7}$$

donde los números c_1 y c_2 y la sucesión d_n vienen dados y $c_2 \neq 0$. Se supone que de la sucesión incógnita conocemos ahora los términos iniciales a_0 y a_1. Si $d_n = 0$ constante, la recurrencia se dice ***homogénea***. La técnica para dar la ***solución general*** de la recurrencia lineal de segundo orden homogénea

$$a_{n+2} = c_1 a_{n+1} + c_2 a_n \quad (c_2 \neq 0;\ n \geq 0), \tag{8}$$

se basa en los dos hechos siguientes:

- La propiedad por la que se dice que (8) es una recurrencia *lineal*, a saber:

  Si (x_n) e (y_n) son dos sucesiones que satisfacen la ecuación (8), entonces la sucesión (z_n) definida por $z_n = Ax_n + By_n$, donde A y B son dos constantes cualesquiera, también satisface (8).
- Si una progresión geométrica $a_n = r^n$ satisface la ecuación (8), entonces la razón r tiene que ser una solución de la *ecuación característica*
$$r^2 - c_1 r - c_2 = 0. \tag{9}$$

Suponiendo que c_1 y c_2 sean números reales se pueden distinguir esencialmente dos casos, dependiendo de que las raíces de la ecuación característica sean:

- Dos números reales distintos, o dos números complejos conjugados: r_1 y r_2. La *solución general* de (8) es
$$a_n = Ar_1^n + Br_2^n \tag{10}$$
  donde A y B son constantes arbitrarias, lo que quiere decir que cualquier sucesión que tenga la forma (10) es solución de (8), y que toda solución de (8) va a tener la forma (10) para ciertos valores de A y B.
- La misma raíz real doble r. La solución general de (8) entonces es
$$a_n = (A + Bn)r^n. \tag{11}$$

En un problema concreto los valores de A y B se determinan a partir de los términos iniciales conocidos a_0 y a_1.

La solución general a_n de la ecuación lineal ***no homogénea*** (7), que depende de dos constantes arbitrarias, se obtiene sumando la solución general a_n^h de la homogénea asociada (8) y una solución particular a_n^p de la propia ecuación (7):

$$a_n = a_n^h + a_n^p.$$

Para encontrar una solución particular a_n^p de (7), si hay suerte con la forma del término independiente d_n se puede emplear el ***método de coeficientes indeterminados***. Por ejemplo, si $d_n = p(n)r^n$, donde $p(n)$ es un polinomio de grado m y $r \in \mathbb{R}$, se puede dar la siguiente regla (generalizable al caso en que $d_n = \sum_{k=1}^{\ell} p_k(n) r_k^n$):

- Si r no es solución de (9) se propone una solución de la forma $a_n^p = q(n)r^n$ donde $q(n)$ es un polinomio de grado m con coeficientes indeterminados (que se determinan por sustitución en (7) y oportuna identificación de coeficientes).

- Si r es raíz de (9) de multiplicidad j ($j = 1$ o 2), se propone una solución de la forma $a_n^p = n^j q(n) r^n$ donde $q(n)$ es un polinomio de grado m con coeficientes indeterminados como antes.

Estas técnicas explicadas se generalizan de manera obvia para la resolución de recurrencias lineales de coeficientes constantes de orden mayor que 2.

Actividad 2.

(a) Resuelve la recurrencia $b_0 = 0$, $b_{n+1} = b_n + a_n$, si a_n es la sucesión definida por $a_1 = 98000$, $10a_{n+1} - 11a_n + 120000 = 0$.

(b) Resuelve, con las técnicas de esta segunda sección, la ecuación en diferencias $\Delta^2 a_n = 3$ con los datos iniciales $a_1 = 1$, $\Delta a_1 = 2$.

(c) Resuelve la recurrencia $a_0 = 6$, $a_1 = -8$, $a_n + a_{n-1} - 6a_{n-2} = 5 \cdot 2^n + 4$ si $n \geq 2$.

(d) Con letras A o B formamos palabras de n letras. ¿Cuántas de estas palabras no tienen dos letras B juntas?
