Seminario de problemas. Curso 2018-19

Recurrencias: Soluciones de las Actividades propuestas

Actividad 1.

(a) Completa el triángulo de Tartaglia hasta la fila 12. ¿Cuánto suma la fila n?

(b) Conjetura, formula y prueba la propiedad general que se visualiza por ejemplo en las casillas coloreadas del triángulo que has completado.

(b★) Prueba la siguiente igualdad ($r, s \geq n$) mediante un argumento combinatorio:

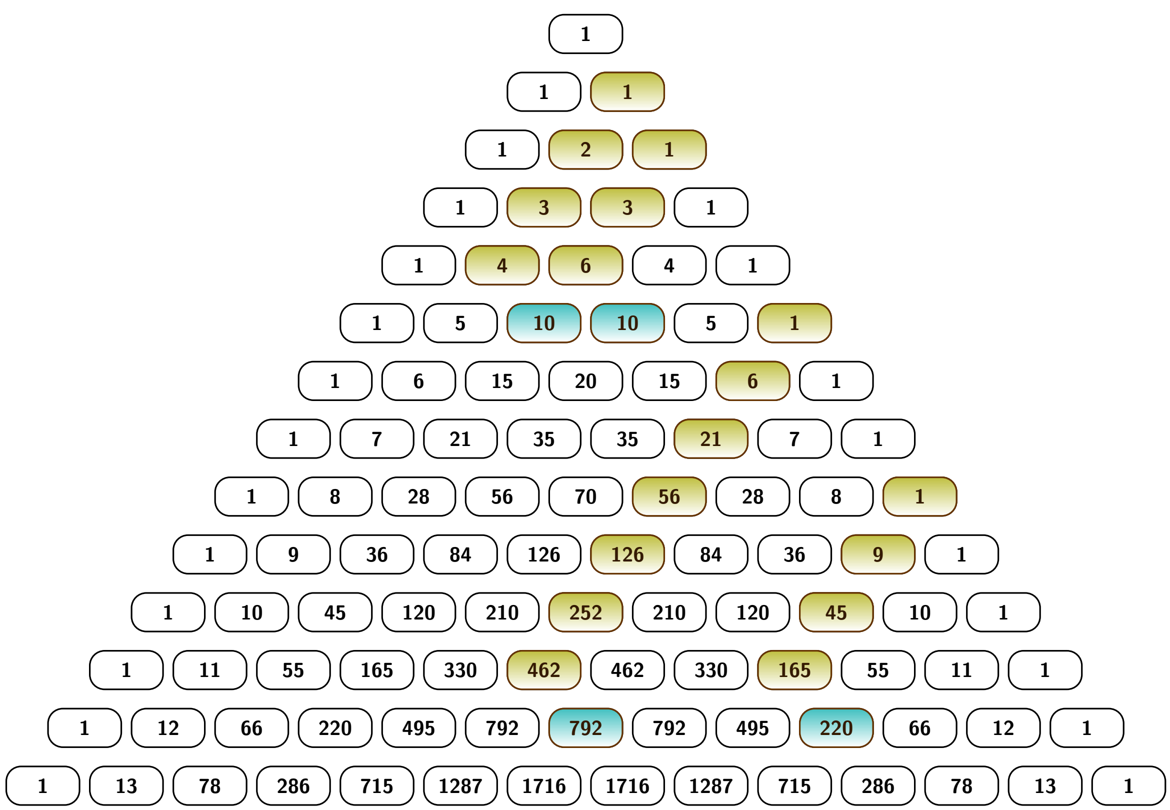
$$\binom{r}{0}\binom{s}{n} + \binom{r}{1}\binom{s}{n-1} + \binom{r}{2}\binom{s}{n-2} + \ldots + \binom{r}{n}\binom{s}{0} = \binom{r+s}{n}.$$

(*Idea*: ¿Cómo elegir n personas de un grupo formado por r mujeres y s hombres?)

(c) ¿Cuál es la proporción de números pares contando desde la fila 0 hasta la fila $2^n - 1$ inclusive del triángulo de Tartaglia? ¿Y la de múltiplos de 3 contando desde la fila 0 hasta la fila $3^n - 1$?

Soluciones.

1(a). Llegando hasta la fila 13 vemos que los números $\binom{13}{5}$ y $\binom{13}{6}$ son los primeros números combinatorios mayores que 1000. La fila n suma $(1+1)^n = 2^n$ por la fórmula del binomio de Newton.



1(b). Las relaciones que muestran las casillas coloreadas son las siguientes:

$$\binom{1}{1}+\binom{2}{1}+\binom{3}{1}+\binom{4}{1}=\binom{5}{2},$$

$$\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}=\binom{5}{3},$$

$$\binom{5}{5}+\binom{6}{5}+\binom{7}{5}+\binom{8}{5}+\binom{9}{5}+\binom{10}{5}+\binom{11}{5}=\binom{12}{6},$$

$$\binom{8}{8}+\binom{9}{8}+\binom{10}{8}+\binom{11}{8}=\binom{12}{9}.$$

Nos damos cuenta de que en efecto, por ejemplo,

$$\binom{5}{3}=\binom{4}{3}+\binom{4}{2}=\binom{3}{3}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}=\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}.$$

Se conjetura la validez de una propiedad de sumación sobre el índice superior que se podría formular así:

Para todos los números enteros $n,\ell\geq 0$ se cumple la relación

$$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\ldots+\binom{n+\ell}{n}=\binom{n+\ell+1}{n+1}. \tag{1}$$

Se puede probar por inducción en ℓ para cada $n\geq 0$ fijo. Para $\ell=0$ es cierta:

$$\binom{n}{n}=\binom{n+1}{n+1}=1,$$

y si (1) se supone cierta para un $\ell\geq 0$, entonces

$$\begin{aligned}\binom{n}{n}&+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\ldots+\binom{n+\ell}{n}+\binom{n+\ell+1}{n}\\ &=\binom{n+\ell+1}{n+1}+\binom{n+\ell+1}{n}\\ &=\binom{n+\ell+2}{n+1}.\end{aligned}$$

Nota. Aplicando la propiedad de simetría de los números combinatorios la relación (1) se puede escribir también en la forma

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\ldots+\binom{n+\ell}{\ell}=\binom{n+\ell+1}{\ell}.$$

1(b★). Para elegir n personas de un grupo formado por r mujeres y s hombres, para cada k desde $k=0$ hasta $k=n$ podemos unir un grupo cualquiera de k mujeres elegidas entre las r mujeres (hay $\binom{r}{k}$ grupos así) con un grupo cualquiera de $n-k$ hombres elegidos entre los s hombres (y hay $\binom{s}{n-k}$ grupos así).

1(c). (Estalmat - Madrid, `http://www.estalmat.org/madrid/videos/`: *El triángulo de Pascal*, por Eugenio Hernández.)

Llamemos N_n al total de los números que componen el triángulo de Tartaglia hasta la fila n inclusive, R_n al total de pares y A_n al de los impares hasta esa misma fila. Se tiene $N_n = 1 + 2 + \ldots + (n+1) = (n+2)(n+1)/2 = \binom{n+2}{2}$. En particular si $n = 2^m - 1$, a la vista de la figura se puede construir una tabla como la siguiente (ver la Figura 1):

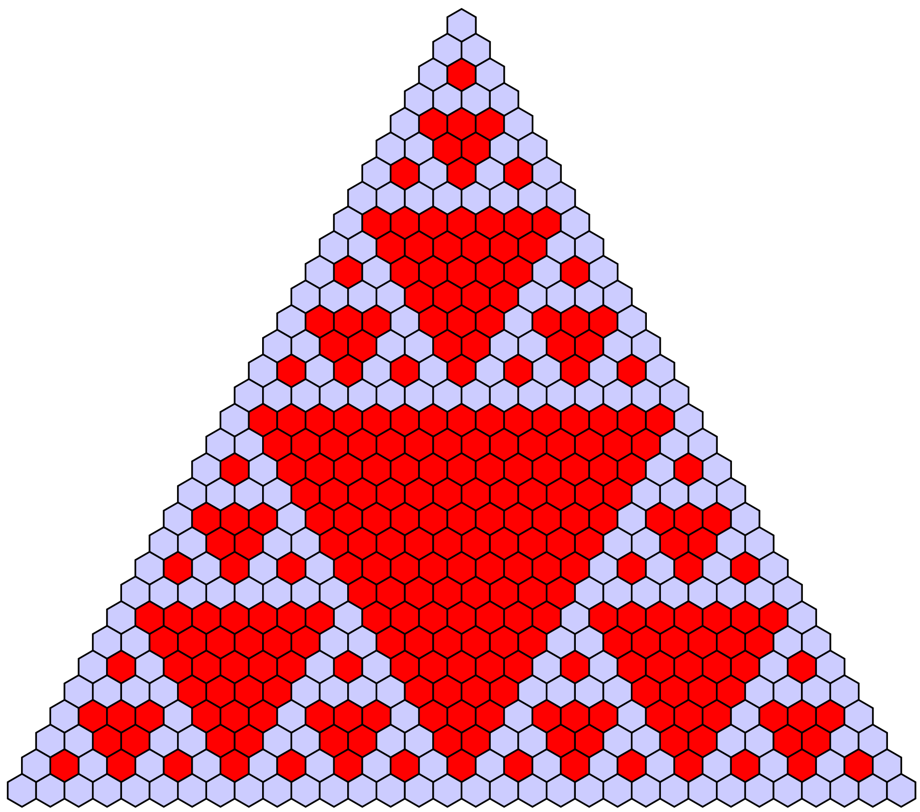


Figura 1: Triángulo de Tartaglia módulo 2.

n	N_n	A_n	R_n	R_n/N_n
$2^2 - 1 = 3$	10	9	1	$1/10 = 0{,}1$
$2^3 - 1 = 7$	36	27	9	$1/4 = 0{,}25$
$2^4 - 1 = 15$	136	81	55	$55/136 = 0{,}404$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
$2^m - 1$	$(2^m+1)2^{m-1}$	3^m	$(2^m+1)2^{m-1} - 3^m$	$1 - \frac{2 \cdot 3^m}{4^m + 2^m}$

Y para la proporción de los múltiplos de 3 (denotamos su número hasta la fila n inclusive por R_n y el resto de números por A_n) se encuentra la tabla siguiente (ver la

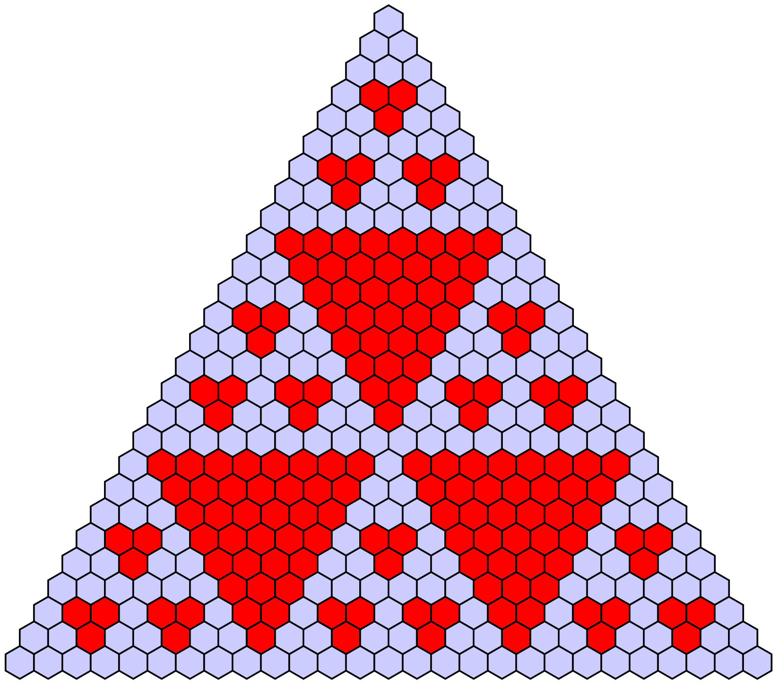


Figura 2: Triángulo de Tartaglia módulo 3.

Figura 1):

n	N_n	A_n	R_n	R_n/N_n
$3^2-1=8$	45	36	9	$1/5=0{,}2$
$3^3-1=26$	378	$6\cdot 36$	162	$3/7=0{,}43$
$3^4-1=80$	3240	6^4	1944	$25/41=0{,}61$
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .
3^m-1	$\frac{1}{2}(3^m+1)3^m$	6^m	$\frac{1}{2}(3^m+1)3^m-6^m$	$1-\frac{2\cdot 6^m}{9^m+3^m}$

(La figura de 1(a) y las Figuras 1 y 2 están hechas con la colaboración de Edgar Labarga a partir de un archivo LaTeX, 'Pascal's triangle and Sierpinski triangle', de Paul Gaborit (2009), que se encuentra en *Overleaf*, `http://www.texample.net/tikz/examples/pascals-triangle-and-sierpinski-triangle`, under Creative Commons attribution license.)

Eduardo Sáenz de Cabezón hace una divertida y excelente presentación del triángulo de Pascal y los números combinatorios en youtube, aquí la recomendamos, no dejéis de verla:

`https://www.youtube.com/watch?v=DPxIbJ-Rbf4`

Actividad 2.

(a) Demuestra por inducción la fórmula

$$a_n = a_1 + \binom{n-1}{1} d_1' + \binom{n-1}{2} d_1'' + \ldots + \binom{n-1}{k} d. \tag{2}$$

para el término general de una *progresión aritmética de orden* k (tendrás que usar posiblemente la fórmula encontrada en la Actividad 1(b)).

(b) Prueba, por cálculo de diferencias, que $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$.

(c) Encuentra el término general de la sucesión que comienza

$$1,\ 6,\ 21,\ 56,\ 126,\ 252,\ 462,\ 792,\ \ldots$$

Puedes suponer que es una progresión aritmética de orden k si llegas a encontrar que las tres primeras diferencias consecutivas de orden k son iguales. Y terminar, aplicando la fórmula de la Actividad 1(b★).

Soluciones.

2(a). Inducción en k. Para $k = 1$ (una progresión aritmética normal) la fórmula (2) es cierta. Supongamos la fórmula cierta para un $k \geq 1$. Sea (a_n) una progresión aritmética de orden $k+1$, y por consiguiente de diferencia $(k+1)$-ésima constante igual a d. Entonces la sucesión (d'_n) de primeras diferencias asociada es una progresión aritmética de orden k de diferencia k-ésima constante igual a d, y por la hipótesis de inducción se cumple para todo n la fórmula

$$d_n = d'_1 + \binom{n-1}{1}d''_1 + \binom{n-1}{2}d'''_1 + \ldots + \binom{n-1}{k}d. \tag{3}$$

Por consiguiente, y aplicando al final la propiedad probada en 1(b)),

$$\begin{aligned}
a_n &= a_1 + d'_1 + d'_2 + \ldots + d'_{n-1} \\
&= a_1 + d'_1 + \left(d'_1 + \tbinom{1}{1}d''_1\right) + \left(d'_1 + \tbinom{2}{1}d''_1 + \tbinom{2}{2}d'''_1\right) + \ldots \\
&\qquad\qquad + \left(d'_1 + \tbinom{n-2}{1}d''_1 + \tbinom{n-2}{2}d'''_1 + \ldots + \tbinom{n-2}{k}d\right) \\
&= a_1 + (n-1)d'_1 + \left(\tbinom{1}{1} + \tbinom{2}{1} + \ldots + \tbinom{n-2}{1}\right)d''_1 + \left(\tbinom{2}{2} + \ldots + \tbinom{n-2}{2}\right)d'''_1 + \ldots \\
&\qquad\qquad + \left(\tbinom{k}{k} + \ldots + \tbinom{n-2}{k}\right)d \\
&= a_1 + \binom{n-1}{1}d'_1 + \binom{n-1}{2}d''_1 + \binom{n-1}{3}d'''_1 + \ldots + \binom{n-1}{k+1}d,
\end{aligned}$$

y hemos terminado.

2(b). Tenemos la siguiente tabla de diferencias:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
0 & & 1 & & 9 & & 36 & & 100 & & 225 & & \ldots & & \boldsymbol{S_n} \\
& \mathbf{1} & & \mathbf{8} & & \mathbf{27} & & \mathbf{64} & & \mathbf{125} & & \ldots & & \boldsymbol{n^3} & \\
& & \mathbf{7} & & 19 & & 37 & & 61 & & \ldots & & & & \\
& & & \mathbf{12} & & 18 & & 24 & & \ldots & & & & & \\
& & & & \mathbf{6} & & 6 & & \ldots & & & & & &
\end{array}$$

de manera que

$$\begin{aligned} S_n &= 1\binom{n}{1} + 7\binom{n}{2} + 12\binom{n}{3} + 6\binom{n}{4} \\ &= n + \frac{7}{2}n(n-1) + 2n(n-1)(n-2) + \frac{1}{4}n(n-1)(n-2)(n-3) \\ &= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2. \end{aligned}$$

2(c).

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
a_1 = \mathbf{1} & & 6 & & 21 & & 56 & & 126 & & 252 & & 462 & & 792 & \dots \\
& \mathbf{5} & & 15 & & 35 & & 70 & & 126 & & 210 & & 330 & & \dots \\
& & \mathbf{10} & & 20 & & 35 & & 56 & & 84 & & 120 & & \dots & \\
& & & \mathbf{10} & & 15 & & 21 & & 28 & & 36 & & \dots & & \\
& & & & \mathbf{5} & & 6 & & 7 & & 8 & & \dots & & & \\
& & & & & \mathbf{1} & & 1 & & 1 & & \dots & & & &
\end{array}$$

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + 5(n-1) + 10\binom{n-1}{2} + 10\binom{n-1}{3} + 5\binom{n-1}{4} + \binom{n-1}{5} \\ &= \tbinom{5}{5}\tbinom{n-1}{0} + \tbinom{5}{4}\tbinom{n-1}{1} + \tbinom{5}{3}\tbinom{n-1}{2} + \tbinom{5}{2}\tbinom{n-1}{3} + \tbinom{5}{1}\tbinom{n-1}{4} + \tbinom{5}{0}\tbinom{n-1}{5} \\ &= \binom{n+4}{5}, \end{aligned}$$

aplicando la fórmula de la Actividad 1(b★).

Actividad 3.

(a) Demuestra por inducción la fórmula

$$a_n = a_1 r^{n-1} + \frac{r^{n-1}-1}{r-1}\,d \tag{4}$$

del modelo de crecimiento mixto.

(b) En el hospital a un paciente se le suministran inicialmente 1000 mg de un medicamento. Se sabe que cada 4 horas se elimina la cuarta parte del medicamento presente en el organismo, y por otra parte cada 4 horas se le suministra al paciente una dosis adicional de 100 mg del mismo. ¿Cuál es la cantidad de medicamento presente en el organismo de nuestro paciente paciente al cabo de 72 horas?

(c) Para estampillar un paquete de correos vamos pegando sellos de 1 o de 2 euros uno al lado de otro. ¿De cuántas maneras podemos hacerlo, si la franquicia del paquete es de n euros? (M. de Guzmán, Matemáticas de 1º de BUP, ed. Anaya.)

Soluciones.

3(a). La recurrencia es $a_{n+1} = ra_n + d$ $(n \geq 1)$, con $r \neq 1$, de manera que se tiene

$$a_2 = ra_1 + d,$$
$$a_3 = ra_2 + d = r(ra_1 + d) + d = a_1 r^2 + (r+1)d$$

y, suponiendo que

$$a_k = a_1 r^{k-1} + (r^{k-2} + r^{k-3} + \ldots + r + 1)d$$

para un $k \geq 1$, entonces se tiene

$$a_{k+1} = r(a_1 r^{k-1} + (r^{k-2} + r^{k-3} + \ldots + r + 1)d) + d = a_1 r^k + (r^{k-1} + r^{k-2} + \ldots + r^2 + r + 1)d$$

así que queda probada por inducción, para todo n, la fórmula

$$a_n = a_1 r^{n-1} + (1 + r + \ldots + r^{n-2})d,$$

y usando la fórmula de la suma de la progresión geométrica entre paréntesis queda finalmente

$$a_n = a_1 r^{n-1} + \frac{r^{n-1} - 1}{r - 1}\, d.$$

3(b). Denotando por a_n la cantidad de medicamento presente en el organismo al cabo de $4n$ horas, tenemos $a_0 = 1000$ y la recurrencia

$$a_{n+1} = \frac{3}{4}\, a_n + 100, \quad (n \geq 0).$$

Entonces

$$\begin{aligned} a_n &= 1000\Big(\frac{3}{4}\Big)^n + 100\, \frac{1 - \big(\frac{3}{4}\big)^n}{1 - \frac{3}{4}} \\ &= 1000\Big(\frac{3}{4}\Big)^n + 400\Big(1 - \Big(\frac{3}{4}\Big)^n\Big) \\ &= 600\Big(\frac{3}{4}\Big)^n + 400, \end{aligned}$$

de modo que al cabo de 72 horas hay

$$a_{18} = 600\Big(\frac{3}{4}\Big)^{18} + 400 \text{ mg}$$

3(c). Sea G_n el número a determinar. Para $n = 1$ solo hay una forma de franqueo, $\boxed{1}$, luego $G_1 = 1$. Para $n = 2$ hay dos formas: $\boxed{1}\boxed{1}$ y $\boxed{2}$, luego $G_2 = 2$. Para $n \geq 3$ tengo dos posibilidades:

- Comenzar con un $\boxed{1}$ y seguir con uno de los G_{n-1} franqueos de $n - 1$ euros,
- Comenzar con un $\boxed{2}$ y seguir con uno de los G_{n-2} franqueos de $n - 2$ euros.

Se cumple entonces la recurrencia $G_n = G_{n-1}+G_{n-2}$ ($n \geq 3$). Podemos considerar también que $G_0 = 1$. Esta es una recurrencia famosa. El número G_n coincide con el *número de Fibonacci* F_{n+1} , ver las 'Notas sobre recurrencias' del curso anterior 2017-18.

La recurrencia es lineal de segundo orden, de coeficientes constantes y homogénea. La ecuación característica de la recurrencia es

$$r^2 - r - 1 = 0,$$

con las dos soluciones reales $r = (1 \pm \sqrt{5})/2$. La solución general de la recurrencia es entonces

$$G_n = A\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n + B\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n.$$

Los coeficientes A y B se determinan a partir de dos términos iniciales de la sucesión. Si tomamos por ejemplo $G_0 = G_1 = 1$, tenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ \Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)A + \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)B = 1 \end{cases}$$

Sustituyendo la primera ecuación en la segunda resulta $A - B = 1/\sqrt{5}$. Por lo que finalmente

$$A = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}, \qquad B = -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}.$$

Por tanto, la solución del problema es

$$\begin{aligned} G_n &= \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n - \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^{n+1} - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^{n+1}\right). \end{aligned}$$