Seminario de problemas Curso 2017-18

Estrategias matemáticas: principio de inducción.

La inducción es el proceso de descubrimiento de leyes generales a partir de la observación y combinación de casos particulares. En matemáticas, se usa para probar la vericidad de ciertas proposiciones.

Principio de Inducción Matemática. Una propiedad $P(n)$ es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$ si se cumplen:

a) La propiedad es cierta para $n = 1$, es decir, $P(1)$ es cierta. **(Base de la Inducción)**

b) Si suponemos que la propiedad es cierta para $n = k$ **(Hipótesis de Inducción)**, entonces podemos probar que es cierta para $n = k + 1$. Es decir,

$$P(k) \quad \text{verdadera} \quad \Longrightarrow \quad P(k+1) \quad \text{verdadera.}$$

A veces, al tratar de demostrar por inducción simple, nos encontramos con el problema de que no nos basta saber que $P(n)$ es cierto para demostrar que $P(n+1)$ también lo es. En estos casos aplicaremos el método de inducción fuerte así:

Principio de Inducción Matemática Fuerte. Una propiedad $P(n)$ es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$ si se cumplen:

a) Demostraremos que el caso $P(1)$ es cierto.

b) Demostraremos que, usando que el resultado es cierto para $P(1), P(2), \ldots, P(n)$, entonces también es cierto para $P(n+1)$.

Notemos así que $P(n)$ es cierto para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Vamos a resolver ahora algunos problemas:

Problema 1 Demostrar que la suma de los n primeros números impares es n^2.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1 = n^2.$$

B.I Veamos que es cierto para $n = 1$: $1 = 1^2$.

H.I. Supongamos que es cierto para $n = k$, es decir, suponemos que

$$1 + 3 + 5 + \cdots + 2k - 1 = k^2.$$

¿Será cierto para $n = k + 1$?, es decir,

$$1 + 3 + 5 + \cdots + 2k - 1 + 2k + 1 = (k+1)^2?$$

Usamos la H.I. para escribir

$$1 + 3 + 5 + \cdots + 2k - 1 + 2k + 1 = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2.$$

Problema 2 Demostrar que la suma de los cubos de tres números naturales sucesivos es divisible por 9.

B.I Veamos que es cierto para $n = 1$: $1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36 = 9 \cdot 4$.

H.I. Supongamos que es cierto para $n = k$, es decir, suponemos que

$$k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 = 9 \cdot m, m \in \mathbb{N}.$$

¿Será cierto para $n = k + 1$?, es decir,

$$(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 = 9 \cdot n, n \in \mathbb{N}.$$

Usamos la H.I. para obtener el resultado

$$\begin{aligned}(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 &= (k+1)^3 + (k+2)^3 + k^3 + 9k^2 + 27k + 27 = \\ &= (k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3) + 9(k^2 + 3k + 3) = \\ &= 9 \cdot m + 9(k^2 + 3k + 3) = 9 \cdot n.\end{aligned}$$

Problema 3 ¿Se cumple que, para cualquier entero positivo n, el número $2^{2^n} - 1$ es divisible, por al menos n números primos distintos?

B.I Veamos que es cierto para $n = 1$: $2^{2^1} - 1 = (2-1)(2+1) = 3$.

H.I. Supongamos que es cierto para $n = k$, es decir, suponemos que $2^{2^k} - 1$ tiene al menos k factores primos distintos cuando k es un cierto entero mayor o igual que 1. Entonces, para $n = k + 1$ tenemos:

$$2^{2^{k+1}} - 1 = (2^{2^k} - 1)(2^{2^k} + 1)$$

Vemos que los factores $2^{2^k} - 1$ y $2^{2^k} + 1$ son dos números impares consecutivos (y por lo tanto primos entre sí). Usamos la H.I. en $2^{2^k} - 1$ y resulta que $2^{2^{k+1}} - 1$ tiene $k + 1$ factores primos distintos.