Seminario de problemas Curso 2019-20

Estrategias matemáticas: principio de inducción.

La inducción es el proceso de descubrimiento de leyes generales a partir de la observación y combinación de casos particulares. En matemáticas, se usa para probar la vericidad de ciertas proposiciones.

Principio de Inducción Matemática. Una propiedad $P(n)$ es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$ si se cumplen:

a) La propiedad es cierta para $n = 1$, es decir, $P(1)$ es cierta. **(Base de la Inducción)**

b) Si suponemos que la propiedad es cierta para $n = k$ **(Hipótesis de Inducción)**, entonces podemos probar que es cierta para $n = k + 1$. Es decir,

$$P(k) \quad \text{verdadera} \quad \Longrightarrow \quad P(k+1) \quad \text{verdadera.}$$

A veces, al tratar de demostrar por inducción simple, nos encontramos con el problema de que no nos basta saber que $P(n)$ es cierto para demostrar que $P(n+1)$ también lo es. En estos casos aplicaremos el método de inducción fuerte así:
Principio de Inducción Matemática Fuerte. Una propiedad $P(n)$ es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$ si se cumplen:

a) Demostraremos que el caso $P(1)$ es cierto.

b) Demostraremos que, usando que el resultado es cierto para $P(1), P(2), \ldots, P(n)$, entonces también es cierto para $P(n+1)$.

Notemos así que $P(n)$ es cierto para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Vamos a resolver ahora algunos problemas:

Problema 1 Demostrar que la suma de los n primeros números impares es n^2.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1 = n^2.$$

B.I Veamos que es cierto para $n = 1$: $1 = 1^2$.

H.I. Supongamos que es cierto para $n = k$, es decir, suponemos que

$$1 + 3 + 5 + \cdots + 2k - 1 = k^2.$$

¿Será cierto para $n = k + 1$?, es decir,

$$1 + 3 + 5 + \cdots + 2k - 1 + 2k + 1 = (k+1)^2?$$

Usamos la H.I. para escribir

$$1 + 3 + 5 + \cdots + 2k - 1 + 2k + 1 = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2.$$

Problema 2 Demostrar que la suma de los cubos de tres números naturales sucesivos es divisible por 9.

B.I Veamos que es cierto para $n = 1$: $1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36 = 9 \cdot 4$.

H.I. Supongamos que es cierto para $n = k$, es decir, suponemos que

$$k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 = 9 \cdot m, m \in \mathbb{N}.$$

¿Será cierto para $n = k + 1$?, es decir,

$$(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 = 9 \cdot n, n \in \mathbb{N}.$$

Usamos la H.I. para obtener el resultado

$$\begin{aligned}(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 &= (k+1)^3 + (k+2)^3 + k^3 + 9k^2 + 27k + 27 = \\ &= (k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3) + 9(k^2 + 3k + 3) = \\ &= 9 \cdot m + 9(k^2 + 3k + 3) = 9 \cdot n.\end{aligned}$$

Problema 3 ¿Se cumple que, para cualquier entero positivo n, el número $2^{2^n} - 1$ es divisible, por al menos n números primos distintos?

B.I Veamos que es cierto para $n = 1$: $2^{2^1} - 1 = (2-1)(2+1) = 3$.

H.I. Supongamos que es cierto para $n = k$, es decir, suponemos que $2^{2^k} - 1$ tiene al menos k factores primos distintos cuando k es un cierto entero mayor o igual que 1. Entonces, para $n = k + 1$ tenemos:

$$2^{2^{k+1}} - 1 = (2^{2^k} - 1)(2^{2^k} + 1)$$

Vemos que los factores $2^{2^k} - 1$ y $2^{2^k} + 1$ son dos números impares consecutivos (y por lo tanto primos entre sí). Usamos la H.I. en $2^{2^k} - 1$ y resulta que $2^{2^{k+1}} - 1$ tiene $k + 1$ factores primos distintos.

9. Ya conocemos que la suma de los n primeros números naturales es $\frac{n(n+1)}{2}$. La suma de los n primeros cuadrados vale $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Demostrar que la suma de los n primeros cubos vale $\frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$.

Solución:

B.I Veamos que es cierto para $n = 1$:

$$1^3 = \frac{1^2 \cdot 2^2}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

H.I. Supongamos que es cierto para $n = k$, es decir, suponemos que

$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 = \frac{k^2 \cdot (k+1)^2}{4}.$$

¿Será cierto para $n = k + 1$?, es decir,

$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2 \cdot (k+2)^2}{4}.$$

Usamos la H.I. para obtener el resultado

$$
\begin{aligned}
1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 &= \frac{k^2 \cdot (k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \\
&= \frac{k^2 \cdot (k+1)^2}{4} + \frac{4(k+1)^3}{4} = \\
&= \frac{(k+1)^2(k^2+4(k+1)}{4} = \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4} = \\
&= \frac{(k+1)^2 \cdot (k+2)^2}{4}.
\end{aligned}
$$

10. Demostrar que el número 11 siempre divide a $10^n + (-1)^{n+1}$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.
Solución:

B.I *Veamos que es cierto para $n = 0$:*

$$10^0 + (-1)^{0+1} = 0 = 11 \cdot 0$$

Veamos que es cierto para $n = 1$:

$$10^1 + (-1)^{1+1} = 10 + 1 = 11 \cdot 1$$

H.I. *Supongamos que es cierto para $n = k$, es decir, para un número entero m, suponemos que*

$$11 | 10^k + (-1)^{k+1}, 10^k + (-1)^{k+1} = 11m.$$

¿Será cierto para $n = k + 1$?, es decir, ¿se cumplirá para algún número s que:

$$11 | 10^{k+1} + (-1)^{k+2}, 10^{k+1} + (-1)^{k+2} = 11s?.$$

Usamos la H.I. para obtener el resultado

$$
\begin{aligned}
10^{n+1} + (-1)^{n+2} &= 10(10^n + (-1)^{n+1}) - 11(-1)^{n+1} = 10(11m) - 11((-1)^{n+1}) = \\
&= 11(10m + (-1)^n) = 11s
\end{aligned}
$$

11. ¿ Se cumple que $n^2 < n!$ para cualquier n?¿A partir de qué valor es cierto? Demuéstralo.
Solución:

B.I *Veamos que no es cierto para $n = 3$:*

$$3^2 = 9 > 6 = 3!$$

Veamos que es cierto para $n = 4$:

$$4^2 = 16 < 24 = 4!$$

H.I. *Supongamos que es cierto para* $n = k$, *es decir,*

$$k^2 < k!.$$

¿Será cierto para $n = k + 1$*?, es decir,*

$$(k + 1)^2 < (k + 1)!$$

Usamos la H.I. obbtenemos que $k^2 \cdot (k + 1) < k! \cdot (k + 1)$, *y obtenemos*

$$(k + 1)^2 < k^2 \cdot (k + 1) < k! \cdot (k + 1) = (k + 1)!$$

12. ¿ Se puede escribir todo número entero positivo a partir de sumas o restas de los primeros cuadrados consecutivos (esto es, $\pm 1^2 \pm 2^2 \pm 3^2 ... \pm k^2$)?

Solución:

B.I *Veamos que es cierto para* $n = 1, 2, 3$ *y* 4*:*

$$1 = 1^2, 2 = -1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2, 3 = -1^2 + 2^2, 4 = 1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2$$

H.I. *Suponiendo, por inducción fuerte, que es cierto para cualquier valor anterior a* n, *escribimos el valor de* $n + 4$ *a partir del valor de* n *dado que para cualquier valor de* x *entero se cumple que:*

$$x^2 - (x + 1)^2 - (x + 2)^2 + (x + 3)^2 = 4.$$