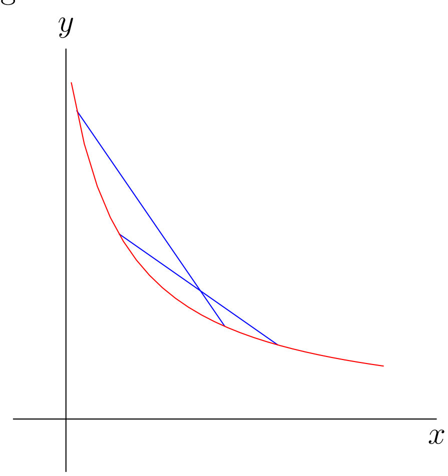
Seminario de problemas Curso 2019-20.

Estrategias matemáticas:
Desigualdades.

---

1. La desigualdad de Jensen

Una función definida en un intervalo se dice *estrictamente convexa* si las cuerdas que delimitan dos puntos en la gráfica de la función están siempre por encima de la gráfica de la función. Si admitimos la posibilidad de que, en algún caso, la cuerda y la gráfica coincidan la función se dice convexa.



Similarmente, una función definida en un intervalo se dice *estrictamente cóncava* si las cuerdas que delimitan dos puntos en la gráfica de la función están siempre por debajo de la gráfica de la función. Si admitimos la posibilidad de que, en algún caso, la cuerda y la gráfica coincidan la función se dice cóncava.

Resumimos algunos ejejmplos y propiedades fundamentales del concepto de convexidad.

(I) Las rectas son convexas y cóncavas a la vez.

(II) las funciones parabólicas $f(x) = ax^2 + bx + c$ son estrictamente convexas si $a > 0$ y estrictamente cóncavas si $a < 0$. En general si una función $x \mapsto f(x)$ es estrictamente convexa su función opuesta $x \mapsto -f(x)$ es estrictamente cóncava.

(III) La función exponencial $f(x) = e^x$ es estrictamente convexa.

(IV) La función logarítmica $f(x) = \log x$ es estrictamente cóncava. En general si una función es estrictamente convexa e estrictamente creciente, su inversa es estrictamente cóncava.

(v) La función potencial $f(x) = x^a$ es estrictamente convexa si $a > 1$ y estrictamente cóncava si $0 < a < 1$.

(vi) La función valor absoluto $f(x) = |x|$ es estrictamente convexa.

(vii) La función $f(x) = 1/x$ es estrictamente convexa en $(0, \infty)$.

(viii) La función $f(x) = \sin x$ es estrictamente cóncava en $(0, \pi)$.

(ix) La suma de dos funciones convexas es una función convexa. Si una de ellas es estrictamente convexa, lo es la suma.

(x) La composición de dos funciones convexas y estrictamente crecientes es una función convexa. Si una de ellas es estrictamente convexa, lo es la composición.

(xi) Si $f(x)$ es convexa, $f(a+x)$ y $f(a-x)$ son convexas para cualquier valor real de a.

(xii) Si una función $f(x)$ es dos veces derivable y $f''(x) > 0$, entonces f es estrictamente convexa.

Teorema 1.1 (Desigualdad de Jensen)**.** *Sea $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ una función convexa. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Dados números*

$$x_1, \dots, x_n$$

en el intervalo (a,b) y números no negativos λ_1, …, λ_n con

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1,$$

se tiene que

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n).$$

En caso de que f sea estrictamente convexa la desigualdad es estricta, excepto en los casos triviales en los que existe k tal que $\lambda_k = 1$ o todos existe x tal que $x_1 = \cdots = x_n = x$.

Para una función cóncava se obtiene un resultado similar, cambiando el sentido de la desigualdad.

Nota 1.2. En las condiciones del teorema de Jensen la cantidad

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$$

es una media ponderada de las cantidades x_1, …, x_n, y la cantidad

$$\lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n)$$

es una media ponderada de las cantidades $f(x_1)$, …, $f(x_n)$. Por tanto el teorema de Jensen dice que “la imagen de una media por una función convexa es menor o igual que la media de las imágenes”.

Problema 1.3 (Desigualdad de Nesbitt). Sean a, b, c números positivos. Probad que:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

y que la igualdad se da sólamente cuando a=b=c.

Solución. Esta desigualdad es homogénea, es decir, dada cierta terna de números positivos (a, b, c) que cumple la desigualdad, entonces, cualquiera que sea $t > 0$ la terna (ta, tb, tc) también la cumple. Así que podemos suponer sin pérdida de generalidad que $a + b + c = 1$. Se tiene, entonces

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \underbrace{\frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c}}_{A}$$

Consideramos la función

$$f(x) = \frac{3x}{1-x} = -3 + \frac{3}{1-x}, \quad 0 < x < 1,$$

que es estrictamente convexa. Por tanto

$$A = \frac{f(a) + f(b) + f(c)}{3} \geq f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{2}.$$

La igualdad se da si y sólo $a = b = c$. □

2. Desigualdades de medias

El valor medio de los valores $x_1, \ldots, x_n$ es el valor

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

Puesto que vamos a generalizar este concepto, llamamos a este valor medio **media aritmética** de los valores $x_1, \ldots, x_n$.

La manera de generalizar el concepto de media es transformar los valores mediante una función φ, luego calcular su media y, finalmente, transformar la media obtenida mediante la función inversa de φ. Nos vamos a limitar a calcular medias generalizadas de valores no negativos. El caso más importante aparece cuando la función transformadora es $\varphi(x) = x^2$. Obtenemos así el valor

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}},$$

que se conoce como **media cuadrática**. También es clásico considerar la transformación $\varphi(x) = 1/x$. Obtenemos el valor

$$\frac{n}{1/x_1 + \cdots + 1/x_n},$$

conocido como **media armónica**. Más en general, si nos limitamos a valores no negativos y consideramos la función potencial $\varphi(x) = x^p$ para un cierto valor de $p \neq 0$ obtenemos el valor

$$\left(\frac{x_1^p + \cdots + x_n^p}{n}\right)^{1/p},$$

conocido como **media de orden** p. Notamos que la media aritmética es la media de orden 1, la media cuadrática es la media de orden 2, y la media armónica es la media de orden -1.

Aunque nuestra construcción omite el caso $p = 0$ es posible dar una definición *adecuada* de la media de orden 0, conocida como **media geométrica**. La definición adecuada es

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}.$$

Finalmente, como ya hemos visto al hablar de la desigualdad de Jensen, es posible considerar medias ponderadas asociadas a valores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, siempre que respetemos las reglas

$$\lambda_k \geq 0, \quad \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1.$$

El valor medio ponderado es, en este caso,

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n,$$

Notamos que el caso *no ponderado* se obtiene como un caso particular cuando

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \frac{1}{n}.$$

De este modo la media ponderada de orden p responde a la fórmula,

$$\left(\lambda_1 x_1^p + \cdots + \lambda_n x_n^p\right)^{1/p}.$$

La media geométrica, o media de orden 0, ponderada tiene la expresión

$$x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n}.$$

Teorema 2.1 (Desigualdad de medias)**.** *Sean $x_k > 0$, $\lambda_k > 0$, $(k = 1, \ldots n)$ tales que*

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1.$$

Llamamos M_p a la media ponderada de orden p. Esto es,

$$\begin{aligned} M_p &= \left(\lambda_1 x_1^p \cdots + \lambda_n x_n^p\right)^{1/p}, \quad p \neq 0; \\ M_0 &= x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n}. \end{aligned}$$

Se tiene que la función $p \mapsto M_p$ es creciente, esto es

- $M_p \leq M_q$ *si* $p < q$.

Además, en caso de que no todos los valores de x_k sean iguales, la función es estrictamente creciente, esto es,

- $M_p < M_q$ *si* $p < q$.

Nota 2.2. Si nos limitamos a los casos más comunes, que son la media aritmética (AM), la media cuadrática (QM), la media geométrica (GM) y la media armónica (HM) obtenemos las desigualdades

$$HM \leq GM \leq AM \leq QM.$$

Problema 2.3. Probad que para todo $n \geq 2$ y $x_1, \ldots x_n > 0$

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geq n.$$

Solución. La desigualdad del enunciado es equivalente a

$$\underbrace{\frac{\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1}}{n}}_{A} \geq 1.$$

La cantidad A es la media aritmética de $x_1/x_2, \ldots x_2/x_3, \ldots, x_{n-1}/x_n, x_n/x_1$ Puesto que el producto de estos números es 1, su media geométrica es 1. Por tanto $A \geq 1$, como queríamos demostrar. □

Problema 2.4. Probad que para todo a, b, c reales no negativos se tiene

$$(ab + bc + ca)^3 \geq 27a^2b^2c^2.$$

Solución. La desigualdad del enunciado es equivalente a

$$\underbrace{\frac{ab + bc + ca}{3}}_{A} \geq \underbrace{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}_{B}.$$

La cantidad A es la media aritmética de ab, bc, ca. La media geométrica de estos tres números es

$$\sqrt[3]{a \cdot b \cdot b \cdot c \cdot c \cdot a} = B.$$

Por tanto, $A \geq B$, como queríamos demostrar. □

Problema 2.5 (Desigualdad de Nesbitt). Sean a, b, c números positivos. Probad que:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

y que la igualdad se da sólamente cuando a=b=c.

Solución. Esta desigualdad es homogénea, es decir, dada cierta terna de números positivos (a, b, c) que cumple la desigualdad, entonces, cualquiera que sea $t > 0$ la terna (ta, tb, tc) también la cumple. Así que podemos suponer sin pérdida de generalidad que $a + b + c = 1$. Se tiene, entonces

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c} = -3 + \frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c}$$

Por tanto, tenemos que probar que

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} \geq \frac{3}{2} + 3 = \frac{9}{2}.$$

Ahora nuestra desigualdad objetivo es equivalente a

$$\frac{1}{\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c}} \leq \frac{2}{9},$$

que a su vez equivale a

$$\underbrace{\frac{3}{\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c}}}_{A} \leq \frac{2}{3}.$$

A es la media armónica de $1 - a$, $1 - b$, $1 - c$. La media aritmética de estos tres números es

$$\frac{1 - a + 1 - b + 1 - c}{3} = \frac{3 - 1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Como sabemos que la media armónica es menor que la aritmética, queda probada la desigualdad. La igualdad se da si y sólo si $1 - a = 1 - b = 1 - c$, que equivale a $a = b = c$. □

3. Desigualdad de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz

Esta desigualdad está relacionada con el concepto de ángulo y de tamaño de un vector. Denotemos mediante $\|\vec{x}\|$ la longitud de un vector $\vec{x}$. Dejando la definición formal de ángulo a un lado, supongamos que dos vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ forman un ángulo α. El producto escalar de estos dos vectores responde a la fórmula

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos(\alpha)$$

Puesto que $\cos(\alpha)$ es un valor entre -1 y 1, se tiene que

$$|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|,$$

y la igualdad se da cuando el ángulo vale 0 o π.

Supongamos que $\vec{x}$ e $\vec{y}$ son vectores n-dimensionales y escribamos

$$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n), \quad \vec{y} = (y_1, \ldots, y_n).$$

Entonces, la longitud de $\vec{x}$ responde a la expresión

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2},$$

y el producto escalar a la expresión

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

Colocando todas las piezas obtenemos la desigualdad de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz.

Teorema 3.1 (Desigualdad de CBS)**.** *Sean x_1, y_1, ..., x_n, y_n números reales. Supongamos que algún valor de y_k es no nulo. Se tiene*

$$x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \leq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2},$$

y la igualdad se da si y solo si existe un número $t \geq 0$ para el cual $y_1 = tx_1$, ..., $y_n = tx_n$.

Problema 3.2 (Lema de Titu). Sean a_1, a_2, $\ldots a_n$, b_1, b_2, $\ldots b_n$ números positivos. Entonces

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 \cdots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}.$$

Además la igualdad se da si y sólo si existe $t > 0$ de modo que $a_k = tb_k$, $k = 1, \ldots, n$.

Solución. Notemos que la desigualdad del enunciado es equivalente a

$$\left(\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n}\right)^{1/2} (b_1 + \cdots + b_n)^{1/2} \geq a_1 + \cdots + a_n.$$

Esta desigualdad se obtiene la desigualdad de CBS con

$$x_k = \frac{a_k}{\sqrt{b_k}}, \quad y_k = \sqrt{b_k}.$$

Notamos, además, que la igualdad se alcanza si existe una constante t tal que

$$\frac{a_k}{\sqrt{b_k}} = t\sqrt{b_k}, \tag{1}$$

$k = 1, \ldots, n$. Además (1) equivalve a $a_k = tb_k$. □

Problema 3.3 (Olimpiada Checa y Eslovaca, 1999). Sean a, b, c números positivos. Probad que

$$\frac{a}{b + 2c} + \frac{b}{c + 2a} + \frac{c}{a + 2b} \geq 2.$$

Solución. Gracias al Lema de Titu

$$\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b}=\frac{a^2}{ab+2ac}+\frac{b^2}{bc+2ab}+\frac{c^2}{ac+2bc}\geq\frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ac)}$$

Por tanto, basta demostrar que

$$(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ac)$$

Esta desigualdad equivale a

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca.$$

Finalmente, puesto que $uv\leq (u^2+v^2)/2$,

$$ab+bc+ca\leq\frac{a^2+b^2+b^2+c^2+c^2+a^2}{2}=a^2+b^2+c^2. \qquad \square$$

4. Desigualdad de reordenamiento

Supongamos que tenemos dos colecciones

$$\begin{aligned}&a_1,\ldots,a_n,\\&b_1,\ldots,b_n\end{aligned}$$

números positivos y emparejamos cada número de la colección de números a_k con un número distinto de la colección b_k. Luego multiplicamos cada par de números emparejados y, finalmente, sumamos los n valores obtenidos. Si $b_{\rho(k)}$ es la pareja de a_k el valor obtenido es

$$a_1b_{\rho(1)}+\cdots+a_nb_{\rho(n)}. \tag{2}$$

Nos preguntamos por el mayor y menor valor que alcanza (2). La respuesta es que el mayor valor se alcanza cuando el criterio de emparejamiento responde a emparejar mayores altos de a_k con valores altos de b_k, mientras que el menor valor se alcanza cuando emparejamos valores altos de a_k con valores bajos de b_k. Damos un enunciado preciso.

Teorema 4.1. *Sean a_1, b_1, …, a_n, b_n tales que*

$$\begin{aligned}a_1>a_2>\ldots>a_n\geq 0\\ b_1>b_2>\ldots>b_n\geq 0.\end{aligned}$$

Entonces,para cualquier permutación ρ de $\{1,\ldots,i,\ldots,n\}$ se tiene que

$$a_1b_n+\cdots+a_nb_1\leq a_1b_{\rho(1)}+\cdots+a_nb_{\rho(n)}\leq a_1b_1+\cdots+a_nb_n. \tag{3}$$

La segunda desigualdad se convierte en identidad cuando y sólo cuando ρ es la identidad. La primera desigualdad se convierta en identidad cuando y sólo cuando ρ viene dada por $\rho(1)=n$, …, $\rho(n)=1$.

Problema 4.2 (IMO, 1975). Consideramos dos colecciones de números $x_1 \le \cdots \le x_n$ e $y_1 \le \cdots \le y_n$. Sea $(z_1, \ldots, z_n)$ una permutación de $(y_1, \ldots, y_n)$. Probad que

$$(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2 \le (x_1 - z_1)^2 + \cdots + (x_n - z_n)^2.$$

Solución. Si tenemos es cuenta que $y_1^2 + \cdots + y_n^2 = z_1^2 + \cdots + z_n^2$ obtenemos que la desigualdad del enunciado equivale a

$$x_1 z_1 + \cdots + x_n z_n \le x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n,$$

que es consecuencia de la desigualdad de reordenamiento. □

Problema 4.3 (IMO, 1978). Consideramos enteros positivos distintos $x_1, \ldots x_n$. Probad que

$$\frac{x_1}{1^2} + \frac{x_2}{2^2} + \cdots + \frac{x_n}{n^2} \ge \frac{1}{1} + \frac{1}{2} \cdots + \frac{1}{n}.$$

Demostración. Hay una permutación $(y_1, \ldots, y_n)$ de los n primeros números naturales tal que $x_k \ge y_k$ para todo k. Por tanto

$$\frac{x_1}{1^2} + \frac{x_2}{2^2} + \cdots + \frac{x_n}{n^2} \ge \frac{y_1}{1^2} + \frac{y_2}{2^2} + \cdots + \frac{y_n}{n^2}.$$

Por la desigualdad de reordenamiento

$$\frac{y_1}{1^2} + \frac{x_2}{2^2} + \cdots + \frac{y_n}{n^2} \ge \frac{1}{1^2} + \frac{2}{2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} \cdots + \frac{1}{n}.$$ □

Problema 4.4 (Desigualdad de Nesbitt). Sean a, b, c números positivos. Probad que:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}$$

y que la igualdad se da sólamente cuando a=b=c.

Solución. Esta desigualdad es simétrica, es decir, si cierta terna de números positivos (a, b, c) que cumple la desigualdad, entonces cualquier permutación suya la cumple. Así, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $a \le b \le c$. Se tiene, entonces

$$b + c \ge a + c \ge a + b$$

y, por tanto,

$$\frac{1}{b+c} \le \frac{1}{a+c} \le \frac{1}{a+b}.$$

La desigualdad de reordenamiento da

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \ge \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} + \frac{b}{a+b},$$

y también

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \ge \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} + \frac{a}{a+b},$$

Si sumamos obtenemos

$$2\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right) \ge 3.$$

Ahora basta dividir por 2. La igualdad se da si y sólo $a = b = c$. □

5. Miscelánea

Lema 5.1 (Desigualdad triangular)**.** *Para todo x e y reales se tiene que*

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Lema 5.2 (Desigualdad triangular inversa)**.** *Para todo x e y reales se tiene que*

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

Lema 5.3. *Para todo x e y reales se tiene que*

$$2xy \leq x^2 + y^2.$$

Lema 5.4. *Para todo x positivo se tiene*

$$x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

Nota 5.5. Una desigualdad que depende de parámetros $x_1, \ldots x_n$ se dice homogéna si siempre que $x_1, \ldots, x_n$ cumplen la desigualdad también lo hacen $tx_1, \ldots tx_n$ para cualquier $t > 0$. Cuando tenemos una desigualdad homogénea, es suficiente comprobar que se cumple para valores de $x_1, \ldots, x_n$ que verifican la condición adicional

- $x_1 + \cdots + x_n = 1$, o
- $x_1 \cdots x_n = 1$, o
- $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$.

Nota 5.6. Una desigualdad que depende de parámetros $x_1, \ldots x_n$ se dice simétrica si siempre que $x_1, \ldots, x_n$ cumplen la desigualdad también lo hace cualquier permutación de $x_1, \ldots, x_n$. Cuando tenemos una desigualdad simétrica, es suficiente comprobar que se cumple para valores de $x_1, \ldots, x_n$ que verifican la condición adicional

- $x_1 \geq \cdots \geq x_n$, o
- $x_1 \leq \cdots \leq x_n$.

Nota 5.7. Una desigualdad que depende de parámetros $x_1, \ldots x_n$ se dice cíclica si siempre que $x_1, \ldots, x_n$ cumplen la desigualdad también lo hace cualquier permutación cíclica de $x_1, \ldots, x_n$, esto es, lo cumple $x_2, \ldots, x_n, x_1$. Cuando tenemos una desigualdad simétrica, es suficiente comprobar que se cumple para valores de $x_1, \ldots,$ x_n que verifican la condición adicional

- $x_k \geq x_n$ para $k = 1, \ldots k - 1$, o

- $x_k \leq x_n$ para $k = 1, \dots k-1$.

Nota 5.8. En ocasiones, hacer un cambio de variable ayuda a simplificar el problema.

Problema 5.9. Probad que si a, b, c son reales entre 0 y 1 con $a+b+c=2$, entonces

$$\frac{abc}{(1-a)(1-b)(1-c)} \geq 8.$$

Demostración. Denotamos $x = 1-a$, $y = 1-b$, $z = 1-c$. Se tiene que x, y, z están entre entre 0 y 1 y que $x+y+z=1$. Basta probar que

$$\frac{(1-x)(1-y)(1-z)}{xyz} \geq 8,$$

que es equivalente a

$$\frac{(y+z)(x+y)(x+z)}{xyz} \geq 8.$$

Aplicar la desigualdad $u+v \geq 2\sqrt{u}\sqrt{v}$ nos da

$$\frac{(y+z)(x+y)(x+z)}{xyz} \geq \frac{8\sqrt{y}\sqrt{z}\sqrt{x}\sqrt{y}\sqrt{x}\sqrt{z}}{xyz} = 8. \qquad \square$$

Nota 5.10. Las cantidades a, b, c son lados de un triángulo si y sólo si existen números positivos x, y, z tales que

$$a = y+z, \quad b = z+x, \quad c = x+y.$$

6. Problemas

59. Sean a, b, c números positivos tales que $a+b+c=1$. Probad que:

$$\sqrt{a^{1-a}b^{1-b}c^{1-c}} \leq \frac{1}{3}.$$

60. Probad que para todo a, b, c, $d > 0$

$$a^4+b^4+c^4+d^4 \geq a^2bc + b^2cd + c^2da + d^2ab.$$

61. (Olimpiada Matemática Española, 2009) Sean a, b, c números positivos tales que $abc = 1$. Probad que

$$\left(\frac{a}{1+ab}\right)^2 + \left(\frac{b}{1+bc}\right)^2 + \left(\frac{c}{1+ca}\right)^2 \geq \frac{3}{4}.$$

62. Sean a, b, c números positivos. Probad que

$$a+b+c \leq \frac{a^2+b^2}{2c} + \frac{b^2+c^2}{2a} + \frac{c^2+a^2}{2b} \leq \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab}.$$