

Taller de creatividad matemática

Solución al problema tres de septiembre

Dado $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, consideramos la ecuación

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}, \quad (1)$$

donde x, y, z son enteros positivos.

- a. Diseñar un algoritmo para hallar, dado n , una solución (x, y, z) de la ecuación anterior. Observar que es suficiente resolver la ecuación cuando n es un número primo. Se valorará la eficiencia del algoritmo; es decir, aquel que sea más rápido en obtener una solución de la ecuación para números primos n que tengan el orden de 10^{10} .
- b. Demostrar que dado $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ no existen x, y enteros positivos tales que

$$\frac{3}{3n+1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

- c. Sea $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ tal que $n+4$ tiene un divisor de la forma $4j+3$, con $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Encontrar, en función de j y n , una expresión explícita de una solución (x, y, z) de (??) para ese valor de n .
- d. Demostrar que el conjunto de los n para los cuales (??) tiene solución tiene densidad cero; es decir, si

$$A_k = \{j \in \mathbb{Z}_{\geq 2} : j \leq k \wedge (??) \text{ tiene solución para } n = j\}$$

y $|A_k|$ representa la cantidad de elementos de A_k , entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|A_k|}{k} = 0.$$

- e. Probar que si existen α, β, γ en $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ tales que

$$n = (\alpha + 1)(4\beta + 3)(4\gamma + 3) - (\alpha + 1) - (4\beta + 3), \quad (2)$$

entonces la ecuación (??) tiene solución para n .

Nota. Este problema está relacionado con la conjetura de Erdős-Straus. Erdős y Straus conjeturaron que para todo número entero n , $n \geq 2$, la ecuación (??) tiene solución x, y, z en enteros positivos. En la entrada “Egyptian fraction” en Wikipedia se puede tener más información sobre este tema.

Solución. 3.a.

Un algoritmo que halla (comprobado computacionalmente) la solución de (??) dado $n \leq 10^{10}$ es el siguiente:

Paso 1. Fijamos $j = 1$ y $q = \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$, la parte entera de $\frac{n}{4}$.

Paso 2. Hacemos $x_j = q + j$, $\kappa_j = \frac{4}{n} - \frac{1}{x_j}$, $y_j = \lceil \frac{1}{\kappa_j} \rceil$, el menor número entero mayor que $\frac{1}{\kappa_j}$.

Paso 3. Si $\frac{4}{n} - \frac{1}{x_j} - \frac{1}{y_j} = 0$, el algoritmo termina, si no preguntamos si $z_j = \frac{1}{\frac{4}{n} - \frac{1}{x_j} - \frac{1}{y_j}} \in \mathbb{Z}$, entonces el algoritmo también termina y $\frac{4}{n} = \frac{1}{x_j} + \frac{1}{y_j} + \frac{1}{z_j}$, en otro caso incrementamos j y volvemos al Paso 2.

El algoritmo halla la descomposición “greedy” de $\frac{4j-1}{nx_j}$, $j = 1, 2, \dots$, y finaliza cuando dicha descomposición está formada por dos fracciones egipcias. Greedy significa glotón: se halla la fracción con numerador 1 (egipcia), menor que $\frac{4j-1}{nx_j}$, más próxima a dicho número, y se observa si el resto (la diferencia) es una fracción con numerador 1.

En Mathematica, versión 6, se ha programado el algoritmo anterior con el siguiente código:

```
Clear[j]; jmax = 1; nmax = 3;
Timing[Do[j = 1; x = Floor[n/4] + 1;
y = Ceiling[1/(4/n - 1/x)];
z = Floor[1/(4/n - 1/x - 1/y)];
While[4/n - 1/x - 1/y - 1/z != 0,
j++; x = Floor[n/4] + j;
y = Ceiling[1/(4/n - 1/x)];
z = Floor[1/(4/n - 1/x - 1/y)]];
If[j > jmax, jmax = j; nmax = n]; j = 1,
{n, 3, 100000000}]; Print[jmax, ",", nmax]]
35 499,16 459 249
{5385.13, Null}
```

Observar que el tiempo de ejecución fue de una hora y 48 minutos aproximadamente. Estas cuentas se han hecho en un ordenador Pentium Optiplex 760, Intel Core Duo, 3GHz, 1,93 de RAM.

Nota. Se puede mejorar la velocidad de ejecución del programa si se trabaja con n primo, de la forma $4j + 1$, ya que si $n = pq$ y $\frac{4}{p} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$, entonces $\frac{4}{n} = \frac{4}{pq} = \frac{1}{xq} + \frac{1}{yq} + \frac{1}{zq}$. Por otra parte, $\frac{4}{4j+3} = \frac{1}{j+1} + \frac{1}{(4j+3)(j+1)} = \frac{1}{2(j+1)} + \frac{1}{2(j+1)} + \frac{1}{(4j+3)(j+1)}$.

Soluci?n. 3.b.

Supongamos que la ecuaci?n (??) tiene soluci?n para cierto n , con $3n + 1$ primo. Sean las soluciones $x = a$, $y = b$. La relaci?n es equivalente a $3ab = (3n + 1)(a + b)$. As? tenemos que $3n + 1$ divide a $a + b$. Observemos que $3n + 1$ no puede dividir a ambos porque la relaci?n del lema se convertir?a en $3 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1}$, que evidentemente no tiene soluci?n en enteros ($\frac{1}{a_1} \leq 1$, $\frac{1}{b_1} \leq 1$). Si $a = (3n + 1)a_1$, entonces $\frac{3a - 1}{(3n + 1)a} = \frac{1}{b}$, como $3a - 1$ no tiene factores comunes con a , entonces $3a - 1$ divide a $(3n + 1)$, al ser este primo, $3a - 1 = 1$ o $3a - 1 = 3n + 1$ que no son posibles.

Soluci?n. 3.c. Supongamos que $n \geq 2$ satisface

$$n + 4 = (4\alpha - 1)\beta, \quad (3)$$

para $\alpha \geq 1$, $\beta \geq 1$. Demostremos que (??) tiene soluci?n para ese valor de n .

Es obvio que no se tiene la situaci?n $\alpha = \beta = 1$. Definimos $t = \alpha\beta - 1$; entonces la relaci?n (??) se convierte en

$$n + 4 = (4\alpha - 1)\frac{t + 1}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha n + 4\alpha = (4\alpha - 1)(t + 1),$$

que equivale a

$$\alpha n = (4\alpha - 1)t - 1$$

dividiendo por $\alpha n t$, nos queda

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{t} + \frac{1}{\alpha n} + \frac{1}{\alpha n t},$$

de modo que si (??) es cierta, los valores $x = t = \alpha\beta - 1$, $y = \alpha n$, $z = \alpha n t = \alpha n(\alpha\beta - 1)$ satisfacen (??).

Nota. El razonamiento anterior se puede generalizar: si existen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ enteros positivos tales que

$$n = (4\alpha\beta\gamma - 1)\delta - 4\beta^2\gamma,$$

entonces la ecuaci?n (??) tiene soluci?n para n . En el ejercicio propuesto $\beta = \gamma = 1$.

Soluci?n. 3.d. El siguiente resultado es uno de los muchos de la Teor?a de n?meros obtenido por Pierre de Fermat:

Teorema. Si n tiene descomposici?n can?nica en factores primos

$$n = 2^\alpha \prod_{p \equiv 1 \pmod{4}} p^{\beta(p)} \prod_{p \equiv 3 \pmod{4}} p^{\gamma(p)},$$

entonces n se puede expresar como suma de dos cuadrados de n?meros enteros si y s?lo si todos los exponentes $\gamma(p)$, de los factores primos de n que tienen resto 3 al dividirlos por 4, son pares.

Una demostraci3n de este resultado se puede ver en muchos libros de teor3a de n3meros, en particular, en la p3gina 55 de *Niven, I. et al., An introduction to The Theory of Numbers. Fifth Edition. John Wiley & Sons. 1991.*

En particular, el resultado anterior dice que los n3meros que no se pueden representar como suma de cuadrados de enteros tiene un divisor de la forma $4j + 3$. As3 que, por el inciso anterior, todos los n tales que $n + 4$ no es suma de dos cuadrados perfectos la ecuaci3n (??) tiene soluci3n.

Para finalizar la demostraci3n del problema planteado en este inciso utilizamos el siguiente teorema de Landau (la demostraci3n de este resultado se puede ver en *Landau, E. Neuer Beweis des Primzahlsatzes und Beweis des Primidealsatzes. Math. Ann. 56, 1903, 645?-670* o en *Montgomery H.L., Vaughan R.C. Multiplicative number theory I. Classical theory. Cambridge tracts in advanced mathematics. 97. (2007), pp. 266?-268*) que asegura que la cantidad de n3meros que son suma de cuadrados de enteros tiene densidad cero:

Teorema. Sea $h(k)$ la cantidad de enteros $n \leq k$ que son la suma de dos cuadrados de enteros. Entonces existe $C > 0$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{h(k)}{k/\sqrt{\log k}} = C$$

Combinando este resultado con el inciso anterior obtenemos que si $|A_k|$ es la cantidad de $n \leq k$ para los que la ecuaci3n (??) tiene soluci3n, entonces

$$\frac{|A_k|}{k} \leq \frac{h_{k-4}}{k} \sim \frac{C}{\sqrt{\log k}} \quad \text{cdo. } k \rightarrow \infty \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|A_k|}{k} = 0.$$

Soluci3n. 3.e. Observar que si se cumple (??), entonces

$$\begin{cases} n + (\alpha + 1) = ((\alpha + 1)(4\gamma + 3) - 1)(4\beta + 3), \\ 4\beta + 3 = 4^{\frac{(4\beta+3)(4\gamma+3)-1}{4}}(\alpha + 1) - n. \end{cases}$$

$$\Rightarrow n + (\alpha + 1) = ((\alpha + 1)(4\gamma + 3) - 1) \left(4^{\frac{(4\beta+3)(4\gamma+3)-1}{4}}(\alpha + 1) - n \right)$$

$$\Leftrightarrow ((\alpha + 1)(4\gamma + 3) - 1 + 1)n = \left(4((\alpha + 1)(4\gamma + 3) - 1) \frac{(4\beta + 3)(4\gamma + 3) - 1}{4} - 1 \right) (\alpha + 1)$$

y dividiendo por $n(\alpha + 1)((\alpha + 1)(4\gamma + 3) - 1)^{\frac{(4\beta+3)(4\gamma+3)-1}{4}}$ obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{4}{n} &= \frac{1}{(\alpha + 1)^{\frac{(4\beta+3)(4\gamma+3)-1}{4}}} + \frac{1}{(\alpha + 1)^{\frac{(4\beta+3)(4\gamma+3)-1}{4}}((\alpha + 1)(4\gamma + 3) - 1)} \\ &\quad + \frac{1}{n^{\frac{(4\beta+3)(4\gamma+3)-1}{4}}((\alpha + 1)(4\gamma + 3) - 1)}. \end{aligned}$$