

Taller de creatividad matemática

Problema dos

Septiembre de 2010

Sea n un número natural. En una circunferencia marcamos n puntos y, en cada uno de ellos, colocamos una bombilla y un interruptor. Cada vez que pulsamos un interruptor cambia de estado (de encendido a apagado y viceversa) la bombilla que se encuentra en ese mismo lugar y las dos adyacentes.

Determinad, en función del número n , a partir de qué estados iniciales del conjunto de bombillas podemos conseguir apagarlas todas.

Solución

Consideramos el cuerpo $K = \mathbb{Z}_2$ formado por dos elementos $\{0, 1\}$. Identificamos el estado de apagado con 0, y el de encendido con 1.

Concluimos que cambiar de estado una bombilla es sumar 1.

Consideramos el grupo cíclico aditivo formado por n elementos, $G = \mathbb{Z}_n$. Identificamos las bombillas con elementos en G , de manera que elegimos qué bombilla es el 0, y establecemos que $k + 1$ es la bombilla siguiente a k si recorremos la circunferencia en sentido contrario a las agujas del reloj. De este modo, un estado de las bombillas es un elemento del espacio vectorial K^G .

Concluimos que pulsar un interruptor en un lugar k es cambiar al estado que se obtiene sumando al estado inicial el vector que con entrada 1 en los lugares $k - 1$, k , $k + 1$ y 0 en el resto. Llamamos a ese vector v^k ($k \in G$).

Ahora nuestro problema es determinar cuál es el subespacio vectorial que generan $\{v^k, k \in G\}$, al que llamamos V .

Mediante el proceso de diagonalización de Gauss concluimos que

- Si n no es múltiplo de 3, los vectores $\{v^k, k \in G\}$ son linealmente independientes, y $V = K^G$.
- Si n es múltiplo de 3, los vectores $\{v^k, k \in G\}$ son linealmente dependientes, y generan un subespacio de dimensión $n - 2$. Concretamente

$$V = \{v : G \rightarrow K : \sum_{g \equiv 0 \pmod{3}} v(g) = \sum_{g \equiv 1 \pmod{3}} v(g) = \sum_{g \equiv 2 \pmod{3}} v(g)\}.$$

Por tanto

- Si n no es múltiplo de 3 las bombillas se pueden cambiar a partir de cualquier estado.
- Si n es múltiplo de 3, dividimos las bombillas en 3 grupos, cada uno de los cuales lo formamos tomando bombillas que distan 3 lugares. Las bombillas se pueden apagar cuando en los grupos coincide la paridad del número de bombillas encendidas.