

Taller de creatividad matemática

Solución al Problema uno de septiembre de 2010

Consideramos dos ángulos α, β que cumplen $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$. Ordenar de menor a mayor, si es posible, las tres cantidades

$$\frac{\alpha}{\beta}, \quad \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}, \quad \frac{\tan(\alpha)}{\tan(\beta)}.$$

Solución

Notamos que si una función f es estrictamente convexa en un intervalo $[a, b]$ se tiene que

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} > \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

siempre que $a \leq x < y < z \leq b$, mientras que si es estrictamente cóncava la igualdad se invierte.

La función $\sin$ es estrictamente cóncava en $[0, \pi/2]$. Luego

$$\frac{\sin(\alpha) - \sin(0)}{\alpha - 0} < \frac{\sin(\beta) - \sin(0)}{\beta - 0}.$$

La función $\tan$ es estrictamente convexa en $[0, \pi/2]$. Luego

$$\frac{\tan(\alpha) - \tan(0)}{\alpha - 0} > \frac{\tan(\beta) - \tan(0)}{\beta - 0}.$$

Por tanto,

$$\frac{\sin(\alpha)}{\alpha} < \frac{\sin(\beta)}{\beta}, \quad \frac{\tan(\alpha)}{\alpha} > \frac{\tan(\beta)}{\beta}.$$

Si utilizamos que $\sin(\beta), \tan(\beta) > 0$, concluimos

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\tan(\alpha)}{\tan(\beta)}.$$