

Taller de creatividad matemática

Problema dos

Noviembre de 2010

Probar que entre todos los triángulos inscritos en una circunferencia los de mayor área son los equiláteros.

Solución uno

Comenzamos haciendo notar el siguiente hecho, cuya demostración omitimos:

Lema 1 *Consideramos un arco de circunferencia de extremos C, D . Llamamos M al punto medio del arco. El triángulo CDM es isósceles en M . Dado un punto variable X en el arco, el ángulo CXD es constante. Además, el triángulo CXD tiene área máxima cuando $X = M$, y el área del triángulo crece cuando X se acerca a M .*

Partimos de un triángulo cualquiera inscrito en la circunferencia. Construimos a partir de él otro de área mayor, que es equilátero. Lo hacemos en tres pasos, de modo que el área crece en cada uno de los pasos.

Sean α, β, γ los ángulos del triángulo, ordenados de mayor a menor. Puesto que $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ se tiene que $\alpha \geq \pi/3$. Llamamos A, B, C a los vértices en, respectivamente, cada uno de los ángulos.

Reemplazamos A por el punto medio del arco de extremos B, C que contiene a A , al que llamamos A' . Al hacerlo el área crece. Llamamos $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ a los nuevos ángulos. Se tiene que $\alpha = \alpha_0, \beta_0 = \gamma_0$. Por tanto $\beta_0 = \gamma_0 \leq \pi/3$.

Sea M el punto medio del arco de extremos A_0, C que contiene a B . El ángulo $A'MC$ coincide con el ángulo $A'BC$, al que hemos llamado β_0 , y es inferior a $\pi/3$. Por tanto el ángulo MCA' , igual al ángulo $MA'C$ es mayor que $\pi/3$. Además, recordamos que el ángulo BCA' , que hemos llamado γ_0 es menor que $\pi/3$. Por tanto, cuando un punto X de la circunferencia se mueve desde B hasta M , hay un instante en el que el ángulo XCA' es $\pi/3$. Llamamos B' a ese punto X . Reemplazamos B por B' , y el área ha crecido. Llamamos $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ a los nuevos ángulos. Se tiene que $\beta_1 = \beta_0 \leq \pi/3, \gamma_1 = \pi/3$. Por tanto $\alpha_1 \geq \pi/3$.

Reemplazamos C por el punto medio del arco de extremos A', B' que contiene a C , al que llamamos C' . Al hacerlo, el área ha crecido.

El triángulo $A'B'C'$ es isósceles en C' y el ángulo en C' es $\pi/3$. Luego es equilátero.

Solución dos

Consideramos un triángulo inscrito en la circunferencia.

Sean α, β, γ los ángulos que forma el centro de la circunferencia con cada uno de sus lados ($\alpha, \beta, \gamma \geq 0, \alpha + \beta + \gamma = 2\pi$).

Sea R el radio de la circunferencia.

Observando cada uno de los tres triángulos que forman dos vértices del triángulo con el centro de la circunferencia, expresamos el área como

$$A(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{2}R^2(\sin(\alpha) + \sin(\beta) + \sin(\gamma))$$

Si uno de los ángulos, digamos γ , es mayor que π (el triángulo es obtusángulo) se tiene que los otros dos son menores que π . Consideramos $\alpha_0 = \pi - \alpha, \beta_0 = \pi - \beta, \gamma_0 = 2\pi - \gamma$. Se tiene que $0 \leq \alpha_0, \beta_0, \gamma_0 \leq \pi, \alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0 = 2\pi$ y

$$A(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0) = \frac{1}{2}R^2(\sin(\alpha) + \sin(\beta) - \sin(\gamma)) \leq \frac{1}{2}R^2(\sin(\alpha) + \sin(\beta) + \sin(\gamma)) = A(\alpha, \beta, \gamma).$$

Por tanto la función A alcanza el máximo en un punto (α, β, γ) con $\alpha, \beta, \gamma \leq \pi$ /un triángulo es acutángulo).

Puesto que que la función $\sin$ es cóncava en $[0, \pi]$ se tiene, con esta nueva restricción, esta cantidad es menor que

$$A(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{3}{2}R^2 \frac{\sin(\alpha) + \sin(\beta) + \sin(\gamma)}{3} \leq \frac{3}{2}R^2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}\right) = \frac{3}{2}R^2 \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

con igualdad en el caso de que $\alpha = \beta = \gamma = \frac{2\pi}{3}$. O Sea

$$A(\alpha, \beta, \gamma) \leq A\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right).$$

Notamos finalmente que el caso $\alpha = \beta = \gamma = \frac{2\pi}{3}$ corresponde a un triángulo equilátero.

Solución tres

Al igual que antes reducimos el problema a maximizar la función

$$B(\alpha, \beta, \gamma) = \sin(\alpha) + \sin(\beta) + \sin(\gamma)$$

en el conjunto

$$K = \{(\alpha, \beta, \gamma) : \alpha, \beta, \gamma \geq 0, \alpha + \beta + \gamma = 2\pi\}.$$

El conjunto K es compacto y la función B es continua. Por tanto, se alcanza el máximo. Los puntos en que se alcanza el máximo serán puntos del conjunto

$$F = \{(\alpha, \beta, \gamma) : \text{o bien } \alpha = 0, \text{ o bien } \beta = 0, \text{ o bien } \gamma = 0, \alpha + \beta + \gamma = 2\pi\}.$$

o del conjunto

$$S = \{(\alpha, \beta, \gamma) : \alpha, \beta, \gamma > 0, \alpha + \beta + \gamma = 2\pi\},$$

que es una superficie.

Notamos que si una de las coordenadas es nula (por ejemplo $\alpha = 0$), $B(\alpha, \beta, \gamma) = \sin(0) + \sin(\beta) + \sin(2\pi - \beta) = 0$.

Puesto que B es diferenciable, si un punto de la superficie S es máximo, es un punto crítico. Si aplicamos el teorema de los multiplicadores de Lagrange, concluimos que los puntos críticos son los que cumplen

$$\cos(\alpha) = \cos(\beta) = \cos(\gamma).$$

En el caso de que α, β, γ sean inferiores a π , puesto que la función $\cos$ es inyectiva en $[0, \pi]$ llegamos a $\alpha = \beta = \gamma$, y el valor común es $\frac{2\pi}{3}$.

Si uno de los ángulos, digamos γ , es mayor que π , se tiene que los otros dos son menores que π . Llegamos a $2\pi - \gamma = \alpha = \beta$. Por tanto $\alpha = \beta = 0, \gamma = 2\pi$, no tenemos un punto de la superficie.

Notamos que $A(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}) > 0$. Por tanto este punto es el único máximo, y corresponde a un triángulo equilátero.