

# Taller de creatividad matemática

## Problema uno

Noviembre de 2010

Sea  $P(x)$  un polinomio sobre el cuerpo de los reales. Probad que  $P(x) - x$  es un divisor de  $P(P(x)) - x$ .

### Solución

Denotamos  $Q(x) = P(x) - x$  y  $R(x) = P(P(x)) - x$ . Notamos que  $Q$  y  $R$  son dos funciones polinómicas.

Notamos que la divisibilidad de polinomios reales dentro del cuerpo de los reales es equivalente a la divisibilidad en el cuerpo de los complejos, la clausura algebraica de los reales.

Supongamos que todas las raíces (complejas) de  $Q$  son distintas. En ese caso basta probar que toda raíz de  $Q$  lo es también de  $R$ .

Sea  $a$  una raíz compleja del polinomio  $Q$ . Entonces  $Q(a) = 0$ . Luego  $P(a) = a$ . Por tanto  $P(P(a)) = P(a) = a$ . Finalmente,  $R(a) = 0$ .

En el caso de que  $Q(x)$  tenga raíces múltiples, hay que ver que la multiplicidad de las raíces de  $Q(x)$  es menor o igual que las de  $R(x)$ . Esto equivale a que siempre que  $Q^{(j)}(a) = 0$  para  $j = 0, 1, \dots, k$  se tiene que  $R^{(j)}(a) = 0$  para  $j = 0, 1, \dots, k$ . Sin embargo, damos un argumento alternativo:

Notamos que el argumento anterior vale si reemplazamos  $\mathbb{R}$  por un dominio de factorización única con infinitos elementos (para que puedan identificarse polinomios y funciones polinómicas) siempre que el coeficiente director de  $P(x)$  sea una unidad del dominio. En particular vale para un anillo de polinomios  $\mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  ( $n$  natural cualquiera).

Dados  $n \in \mathbb{N}$   $a \in \mathbb{R}$  no nulo, tomamos los polinomios

$$A(x_1, \dots, x_n, x) = a(x - x_1) \cdots (x - x_n),$$

$$B(x_1, \dots, x_n, x) = x + A(x_1, \dots, x_n, x)$$

en  $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n, x] \equiv \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n][x]$ . Las raíces de  $B(x_1, \dots, x_n, x) - x = A(x_1, \dots, x_n, x)$  son  $x_1, \dots, x_n$ , todas distintas. Aplicando el resultado ya probado obtenemos que existe  $L \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n, x]$  tal que

$$L(x_1, \dots, x_n, x)(B(x_1, \dots, x_n, x) - x) = B(B(x_1, \dots, x_n, x), x_1, \dots, x_n) - x.$$

Sea ahora  $P(x)$  un polonomio cualquiera sobre el cuerpo de los reales. Sean  $a_1, \dots, a_n$  las raíces (posiblemente no todas distintas) de  $P(x) - x$ . Sea  $a$  el coeficiente director de  $P(x)$ . Si tomamos  $A, B$  como arriba se tiene que Se tiene que  $P(x) - x = A(a_1, \dots, a_n, x)$ . Luego  $P(x) = x + A(a_1, \dots, a_n, x) = B(a_1, \dots, a_n, x)$ . Si evaluamos la identidad anterior en  $a_1, \dots, a_n$  tenemos que

$$L(a_1, \dots, a_n, x)(B(a_1, \dots, a_n, x) - x) = B(a_1, \dots, a_n, B(a_1, \dots, a_n, x)) - x$$

que se transforma, si denotamos  $M(x) = L(a_1, \dots, a_n, x)$ , en

$$M(x)(P(x) - x) = P(P(x)) - x.$$