LX OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase local, curso 2023 - 2024

Enunciados y soluciones - Tarde del viernes

Problema 1. Sea $ABCD$ un trapecio de bases AB y CD tal que $AD = DC = CB = 5$ y $AB = 10$. Sea O el punto de intersección de las diagonales AC y BD. La recta perpendicular a AC trazada por O corta a la prolongación del lado AD en E y a la base AB en F. Calcular el área del cuadrilátero $AECF$.

Solución. Como $AD = BC$, tenemos que $ABCD$ es un trapecio isósceles. Sea M el punto medio de AB. Por lo tanto, los triángulos ADM, DMC y MCB son equiláteros de lado 5; eso se observa viendo que la altura del trapecio es $h = \sqrt{5^2 - (5/2)^2}$, y por lo tanto $DM^2 = h^2 + (5/2)^2 = 5^2$. Como ADC es isósceles y $\angle ADC = 120°$ por ser suma de dos ángulos de $60°$, tenemos que $AMCD$ es un rombo y las dos diagonales son bisectrices de $\angle DAB$ y $\angle ABC$. Entonces, $\angle AFO = 60°$, ya que $\angle AOF = 90°$ y $\angle FAO = 30°$; y por el mismo motivo, $\angle AEO = 60°$. Por lo tanto, AEF es equilátero y O es el punto medio de EF ya que AO es la altura y por lo tanto también es la mediana.
Podemos calcular la longitud de AF usando que $AC = BD = 5\sqrt{3}$ (por el teorema de Pitágoras en ABC). Además, por el teorema de la bisectriz en ABC, tenemos que $AO = \frac{10}{\sqrt{3}}$. Por lo tanto, como conocemos la altura del triángulo equilátero AEF, tenemos automáticamente que la medida del lado, que es $\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{20}{3}$. Entonces, $AE = AF = EF = \frac{20}{3}$. Finalmente, observamos que $AECF$ es un cuadrilátero con las diagonales perpendiculares cuya área es $\frac{AC \cdot EF}{2} = \frac{50\sqrt{3}}{3}$.

Problema 2. En una fiesta hay 100 personas. Cada par de personas son o bien *amigos* o bien *enemigos* (una y solo una de las dos cosas). Se cumple la siguiente propiedad: si A y B son enemigos y B y C son enemigos, entonces A y C son amigos. Demostrar que hay dos personas X e Y que cumplen simultáneamente estas condiciones:

- X tiene el mismo número de enemigos que Y.
- X e Y son amigos.

Solución. Supongamos que no existe tal par. Sea Δ el máximo número de enemigos que tiene una persona, sea u una persona con Δ enemigos y sean $v_1, v_2, \ldots, v_\Delta$ sus enemigos ordenados por número de enemigos (es decir, v_1 es el que tiene menos enemigos y v_Δ el que tiene más). Nótese que $\Delta \geq 2$, dado que de otra forma habría un par de personas con el mismo número de enemigos que son amigos.
Como $v_1, \ldots, v_\Delta$ son todos amigos entre sí, no pueden haber dos con el mismo número de enemigos, y como Δ es el máximo número de enemigos, tenemos que v_i tiene i enemigos para todo $1 \leq i \leq \Delta$. Sean $w_1, \ldots, w_{\Delta-1}, w_\Delta = u$ los enemigos de v_Δ. Por el mismo razonamiento, w_i tiene i enemigos. Nótese que u y v_Δ no tienen enemigos en

común y, en particular, $v_1 \neq w_1$. Además, v_1 y w_1 son amigos entre sí. Como tienen el mismo número de enemigos, hemos llegado a una contradicción.

Problema 3. Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tres números enteros y sea $p \geq 5$ un número primo. Demostrar que si $an^2 + bn + c$ es el cuadrado de un número entero para $2p - 1$ valores consecutivos de n, entonces $b^2 - 4ac$ es un múltiplo de p.

Solución. Consideramos $f(n) = an^2 + bn + c$ y sean $k, k+1, \ldots, k+2p-2$ números naturales consecutivos para los cuales f es un cuadrado de un número entero.
Una idea que deberemos tener siempre presente durante la resolución de este problema es que un cuadrado perfecto módulo un primo puede tomar únicamente $\frac{p+1}{2}$ valores distintos, siendo uno de ellos el 0.
Primero, consideraremos el caso en el que a sea múltiplo de p y veremos que b también es múltiplo de p. Nos fijamos en $f(k), f(k+1), \ldots, f(k+p-1)$, que sabemos que todos ellos son cuadrados perfectos, y puesto que únicamente hay $\frac{p+1}{2}$ restos posibles módulo p, hay dos de ellos que son congruentes módulo p. Sean r y t tales que $f(r) \equiv f(t) \pmod p$ ($k \leq r, t \leq k+p-1$). Entonces

$$f(r) - f(t) = a(r^2 - t^2) + b(r-t) = (r-t)\left[a(r+t) + b\right] \equiv (r-t)b \equiv 0 \pmod p$$

y como $(r-t)$ no puede ser un múltiplo de p, entonces b es un múltiplo de p. Finalmente, $b^2 - 4ac$ es también múltiplo de p.
Por ende, en lo que queda de demostración, asumiremos que $a \not\equiv 0 \pmod p$.
Consideramos $f(k), f(k+1), \ldots, f(k+p-1)$ y distinguiremos los siguientes casos.

- Ninguno de ellos deje resto 0 módulo p. Entonces, por el principio del palomar, existen $r, s, t \in \{k, k+1, \ldots, k+p-1\}$ tales que $f(r) \equiv f(s) \equiv f(t) \pmod p$ ya que hay $\frac{p-1}{2}$ posibles restos modulares. Operando,

$$\begin{cases} ar^2 + br + c \equiv at^2 + bt + c \pmod p \\ ar^2 + br + c \equiv as^2 + bs + c \pmod p \end{cases} \implies \begin{cases} (r-t)(a(r+t)+b) \equiv 0 \pmod p \\ (r-s)(a(r+s)+b) \equiv 0 \pmod p. \end{cases}$$

  Como ni $(r-t)$ ni $(r-s)$ ni $(t-s)$ pueden ser múltiplos de p, concluimos que

$$a(r+t)+b \equiv a(r+s)+b \equiv 0 \pmod p \implies a(t-s) \equiv 0 \pmod p \implies a \equiv 0 \pmod p.$$

  Llegamos así a una contradicción, por lo tanto este caso no se puede dar.

- Alguno de ellos deje resto 0 módulo p. Entonces existe t tal que $f(t) \equiv 0 \pmod p$ y podemos escribir el polinomio como

$$f(x) = f(t) + (x-t)(2at+b) + a(x-t)^2.$$

  Tomando congruecias módulo p

$$f(x) \equiv f(t) + (x-t)(2at+b) + a(x-t)^2 \equiv (x-t)\left[a(x+t)+b\right] \pmod p$$

  Consideramos la ecuación modular

$$a(x+t) + b \equiv 0 \pmod p.$$

  Por ser p primo y $a \not\equiv 0 \pmod p$, esta ecuación tiene una única solución $x = r$. Sea $k \leq R \leq k+p-1\}$ tal que $R \equiv r \pmod p$. Es evidente[1] que $f(R) \equiv 0 \pmod p$. Distinguiremos en dos casos

[1] $f(R) \equiv (R-t)\left[a(R+t)+b\right] \equiv (r-t)\left[a(r+t)+b\right] \equiv 0 \pmod p$.

- Supongamos que $R \neq t$ y (sin pérdida de generalidad) que $t < R$. En ese caso $k \leq t < R \leq k + p - 1$ y $t + p \leq k + 2p - 2$, es decir, $f(t + p)$ también es un cuadrado perfecto. Además $f(t + p) \equiv f(t) \equiv 0 \pmod p$ y como $f(t)$ y $f(t + p)$ son cuadrados perfectos y múltiplos de p, ambos son múltiplos de p^2. Por lo tanto

  $$f(t+p) - f(t) = a(t+p)^2 + b(t+p) + c - at^2 - bt - c = ap^2 + (2at + b)p$$

  es múltiplo de p^2 y deducimos que $2at + b$ es múltiplo de p.

- Supongamos que $R = t$ en ese caso, $r \equiv t \pmod p$ y se cumple inmediatamente que $2at + b$ es múltiplo de p.

Finalmente $f(t)$ es múltiplo de p y un cuadrado perfecto, entonces es múltiplo de p^2. Por ende,

$$4af(t) = 4a(at^2 + bt + c) = 4a^2t^2 + 4abt + 4ac = (2at + b)^2 - (b^2 - 4ac)$$

es múltiplo de p^2 y, al ser $2at + b$ un múltiplo de p, necesariamente $b^2 - 4ac$ es múltiplo de p^2 y en particular de p.

Enunciados y soluciones - Mañana del sábado

Problema 4. Sea $a > 1$ un número real. Encontrar todas las soluciones de la ecuación

$$\sqrt{a - \sqrt{a+x}} = x$$

en términos de a.

Solución. Elevando al cuadrado y reordenando términos se tiene que $a - x^2 = \sqrt{a+x}$; elevando de nuevo al cuadrado, nos queda

$$a^2 - 2ax^2 + x^4 = a + x.$$

En lugar de intentar resolver la ecuación de cuarto grado, podemos resolverla interpretándola como una ecuación cuadrática en a, esto es,

$$a^2 - (2x^2 + 1)a + (x^4 - x) = 0.$$

Aplicando la fórmula de la ecuación cuadrática nos queda que $a = x^2 - x$ y $a = x^2 + x + 1$. Ahora podemos analizar ambos casos por separado.

- Si $a = x^2 - x$, $x^2 - x - a = 0$, y nos queda $x = \frac{1 \pm \sqrt{4a+1}}{2}$. Observemos que la solución $\frac{1-\sqrt{4a+1}}{2}$ cumple que es menor que 0, y del enunciado se tiene que $x \geq 0$. Además, como $a - x^2 = \sqrt{a+x}$, tenemos que $x \leq \sqrt{a}$, y en cambio tenemos que $x = \frac{1+\sqrt{4a+1}}{2} > \frac{\sqrt{4a}}{2} = \sqrt{a}$.

- Si $a = x^2 + x + 1$, $x^2 + x + 1 - a = 0$, por lo que $x = \frac{-1 \pm \sqrt{4a-3}}{2}$. Como $a > 1$, la solución negativa da lugar a $x < 0$. Es inmediato comprobar que $x = \frac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}$ verifica el enunciado.

Por lo tanto, $x = \frac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}$ es la única solución.

Problema 5. Sea ABC un triángulo acutángulo y D el punto de AB que es el pie de la altura desde C. Sea P un punto arbitrario en el lado BC. Las rectas AP y CD se cortan en el punto E, y las rectas BE y AC se cortan en el punto Q. Probar que CD es la bisectriz del ángulo $\angle PDQ$.

Solución. Sea ℓ la recta paralela a AB y que pasa por el punto C. Sean X e Y los puntos de corte de DQ y DP con ℓ, respectivamente. Se tiene que los triángulos ADQ y CSQ son semejantes, y BDP y CYP también son semejantes. Entonces,

$$CY = \frac{BD \cdot CP}{BP}, \quad CX = \frac{AD \cdot CQ}{AQ}.$$

Dividiendo las dos igualdades se observa que

$$\frac{CX}{CY} = \frac{AD}{BD} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{AQ},$$

y el lado derecho es 1 por el teorema de Ceva. Por lo tanto, $CX = CY$ y CD es una mediana del triángulo isósceles XDY. Como ℓ es paralela a AB, tenemos que $\angle XCD = 90°$. De aquí se concluye que en el triángulo XDY la recta CD es tanto una mediana como una altura, por lo que CD es también la bisectriz de $\angle PDQ$, como queríamos ver.

Problema 6. En cada casilla de un tablero de 1000×2024 está escrito un número y no todos ellos son ceros. Para cada casilla, si A es la suma de todos los números escritos en la fila de la casilla (incluido el número de casilla) y B es la suma de todos los números de la columna de la casilla (incluido el número de la casilla), entonces el número escrito en la casilla es igual al producto AB. Hallar la suma de todos los números del tablero y dar un ejemplo de tablero que tenga, en cada fila, todos los números distintos, y en cada columna, todos los números distintos.

Solución. Sean $a_{i,j}$ con $1 \leq i \leq 1000$ y $1 \leq j \leq 2024$ los números escritos en el tablero. Sea S la suma de todos los números del tablero. Llamamos también $f_i = \sum_{j=1}^{2024} a_{ij}$ la suma de los números de la fila i y $c_j = \sum_{i=1}^{1000} a_{ij}$ la suma de los números de la columna j. Entonces, $a_{i,j} = f_i \cdot c_j$. Ahora bien,

$$f_i = \sum_{j=1}^{2024} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{2024} f_i \times c_j = f_i \sum_{j=1}^{2024} c_j = f_i \times S.$$

Por tanto, $f_i(S-1) = 0$ para todo i. Si $S \neq 1$, entonces $f_i = 0$ para todo i. De la misma manera, $c_j(S-1) = 0$ para todo j. Si $S \neq 1$, entonces $c_j = 0$ para todo j. Entonces, si $S \neq 1$, $a_{i,j} = f_i \cdot c_j = 0$, que no es posible porque sabemos que no todos los números son cero. Por lo tanto, $S = 1$.
Vamos a dar ahora un ejemplo en el que todos los números de una misma fila o columna son diferentes. Para $1 \leq i \leq 1000$, sea $p_i = \frac{2i}{1000 \cdot 1001}$; para $1 \leq j \leq 2024$, sea $q_j = \frac{2j}{2024 \cdot 2025}$. En la posición $a_{i,j}$ ponemos entonces $a_{i,j} = p_i \cdot q_j$. Obviamente, en una misma fila todos los números son diferentes, pues los q_j son distintos; lo mismo sucede en las columnas. La suma de los números en la fila i-ésima es $p_i \cdot (\sum_{j=1}^{2024} q_j) = p_i$, y los de la columna j-ésima suman $q_j \cdot (\sum_{i=1}^{1000} p_i) = q_j$, de manera que se tiene la condición del enunciado.

También se puede dar un ejemplo en el que todos los números del tablero son diferentes. Primero elegimos un número α distinto de 0 y ± 1. A continuación, en todas las filas, menos en la última, escribimos en la casilla (i,j) el número $a_{i,j} = \alpha^{2024(i-1)+j}$. Sean, ahora, $a_{1000,j}$, $1 \leq j \leq 2024$, los números que escribimos en la última fila, con la condición de que

$$f_1 \cdot c_j = a_{1,j},$$

donde f_1 representa la suma de los elementos de la primera fila y c_j la suma de los elementos de la columna j-ésima. Observemos que, con estas condiciones, se cumple que la suma de todos los elementos del tablero suman 1. En efecto, por construcción, se tiene

$$\sum_{j=1}^{2024} f_1 \cdot c_j = \sum_{j=1}^{2024} a_{1,j} = f_1 \Rightarrow \sum_{j=1}^{2024} c_j = S = 1.$$

También se cumple que $f_i \cdot c_j = a_{i,j}$. Si $1 \leq i \leq 999$, entonces $f_i = \alpha^{2024(i-1)} f_1$, por lo que:

$$f_i \cdot c_j = \alpha^{2024(i-1)} f_1 \cdot c_j = \alpha^{2024(i-1)} a_{1,j} = a_{i,j}.$$

Por último, para los elementos de la última fila, resulta

$$\begin{aligned} f_{1000} \cdot c_j &= (1 - f_1 - f_2 - \ldots - f_{999}) \cdot c_j = c_j - f_1 \cdot c_j - \ldots - f_{999} \cdot c_j \\ &= c_j - a_{1,j} - a_{2,j} - \ldots - a_{999,j} = a_{1000,j}. \end{aligned}$$