

LVI Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Primera sesión

Viernes tarde, 17 de enero de 2020

1. Consideramos el polinomio

$$p(x) = (x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a).$$

Demostrar que $p(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ si, y solamente si, $a = b = c$.

Solución 1.

En primer lugar, observamos que cuando $a = b = c$ se tiene que $p(x) = 3(x-a)^2$, que claramente satisface $p(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Supongamos ahora que $p(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Desarrollando la expresión como un polinomio cuadrático, obtenemos que

$$p(x) = 3x^2 - 2(a+b+c)x + ab+bc+ca \geq 0.$$

En particular, esto quiere decir que el discriminante del polinomio, Δ , es menor o igual que 0. Dicho discriminante se puede obtener como

$$\Delta = 4(a+b+c)^2 - 12(ab+bc+ca) = 4(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca).$$

Por lo tanto, tenemos que

$$0 \geq 2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2,$$

y de aquí se sigue que necesariamente $a = b = c$.

Solución 2.

Como antes, si $a = b = c$ se tiene que $p(x) = 3(x-a)^2$, que claramente satisface $p(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Supongamos ahora que $p(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer $a \leq b \leq c$. Evaluando el polinomio en $x = b$ se obtiene

$$p(b) = (b-c)(b-a) \geq 0.$$

Si $b \neq a$ y $b \neq c$, $p(b)$ sería negativo, lo que contradice que $p(x) \geq 0$. Por tanto, o bien $a = b$ o bien $b = c$. Consideremos que es $a = b$ (el otro caso es igual). Entonces, $p(x)$ queda como

$$p(x) = (x-a)^2 + 2(x-a)(x-c).$$

Evaluando el polinomio en el punto medio de a y c , resulta

$$p\left(\frac{a+c}{2}\right) = -\frac{(c-a)^2}{4} \geq 0,$$

que solo es posible si $a = c$, por lo que si $p(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces $a = b = c$.

Obsérvese que no es necesario evaluar, ya que si $a = b$, el polinomio $p(x)$ se puede escribir como

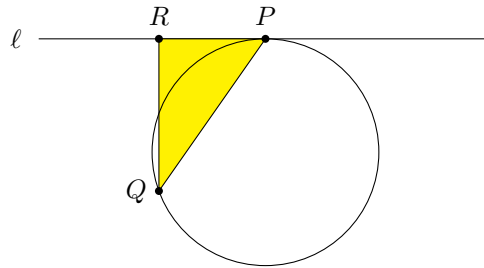
$$p(x) = (x-a)(3x-a-2c),$$

que tiene dos raíces distintas si $a \neq c$, por lo que habría un intervalo en el que $p(x)$ sería negativo.

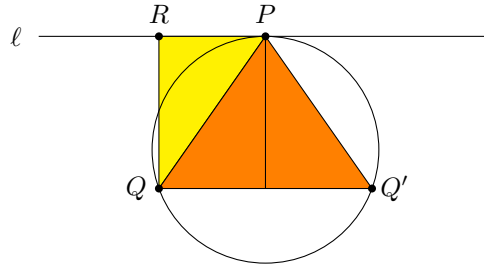
2. Sea ℓ la recta tangente a un punto P de una circunferencia de radio $r = 1$. Por un punto Q de la circunferencia trazamos la recta perpendicular a ℓ , de manera que la corta en un punto R . Determinar el valor máximo del área del triángulo ΔPQR .

Solución 1.

Hagamos un dibujo con los elementos del problema



Lo que se pide es encontrar Q para que el área del triángulo sombreado sea máxima. Sea Q' el simétrico de Q respecto a la perpendicular a ℓ que pasa por Q , entonces tenemos la figura

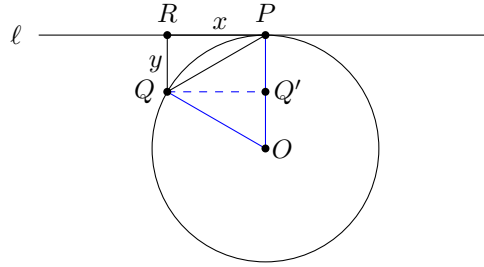


Aquí se ve que el área del triángulo ΔPQR es la mitad del área del triángulo $\Delta PQ'R$, inscrito en la circunferencia. Ahora

bien, de todos los triángulos inscritos en una circunferencia el equilátero es el de área máxima. Como $r = 1$, el lado del triángulo equilátero es $\sqrt{3}$ y el área máxima de ΔPQR es igual a $3\sqrt{3}/8$.

Solución 2.

Es evidente que el área del triángulo ΔPQR depende de la posición del punto Q . Tratemos de encontrar una expresión para el área que sea una función de Q .



De la figura vemos que el triángulo $\Delta QQ'O$ es rectángulo. Por otra parte, la hipotenusa, OQ , es el radio de la circunferencia, por lo que vale 1. Además, el cateto QQ' es igual al segmento RP , por lo que vale x . Finalmente, para el cateto OQ' , se tiene

$$OQ' = OP - PQ' = OP - QR = 1 - y.$$

Aplicando el Teorema de Pitágoras, podemos relacionar x e y , de manera que

$$1 = x^2 + (1 - y)^2 \Rightarrow x = \sqrt{1 - (1 - y)^2}.$$

Así pues, el área del triángulo ΔPQR la podemos expresar en términos de y , de manera que

$$A(y) = \frac{1}{2}y\sqrt{1 - (1 - y)^2} = \frac{1}{2}y\sqrt{y(2 - y)},$$

donde y varía entre 0 y 2. Ahora bien, si A es máxima, también lo es $4A^2 = y^3(2 - y)$, por lo que el problema es equivalente a encontrar el valor de y que maximice la función

$$f(y) = y^3(2 - y) = 2y^3 - y^4,$$

cuando $y \in [0, 2]$. Puesto que $f(0) = f(2) = 0$, el máximo se alcanza en algún punto tal que $0 < y < 2$. Además, en ese punto la derivada tiene que ser igual a 0. Calculando la derivada de $f(y)$ resulta

$$f'(y) = \frac{df}{dy} = 6y^2 - 4y^3 = 2y^2(3 - 2y).$$

Igualando a 0 la expresión de la derivada, resulta $y = 0$, $y = 3/2$. Puesto que $f(y) > 0$ si $0 < y < 2$, es claro que el valor máximo del área se alcanza cuando $y = 3/2$. Sustituyendo en $A(y)$ tenemos que el valor máximo es

$$A(3/2) = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

3. Hallar todas las ternas de números enteros (x, y, z) que verifican la ecuación:

$$2x^3 + y^3 = 4z^3.$$

Solución 1.

Hay al menos una solución, ya que si $x = y = z = 0$ la ecuación se cumple trivialmente. Veamos que no hay más soluciones.

Supongamos que (x, y, z) es una solución donde los tres números son positivos. Observando la ecuación, deducimos que y tiene que ser un número par, por lo que existirá $y_1 > 0$ tal que $y = 2y_1$. Sustituyendo en la ecuación se obtiene

$$2x^3 + 8y_1^3 = 4z^3 \quad \Rightarrow \quad x^3 + 4y_1^3 = 2z^3.$$

De aquí se deduce que x es par, por lo que existe x_1 tal que $x = 2x_1$. Procediendo como antes se llega a

$$8x_1^3 + 4y_1^3 = 2z^3 \quad \Rightarrow \quad 4x_1^3 + 2y_1^3 = z^3,$$

por lo que z es también par y existe z_1 tal que $z = 2z_1$. Volviendo a sustituir, se tiene

$$4x_1^3 + 2y_1^3 = 8z_1^3 \quad \Rightarrow \quad 2x_1^3 + y_1^3 = 4z_1^3.$$

Es decir, la terna (x_1, y_1, z_1) con $0 < x_1 < x$, $0 < y_1 < y$, $0 < z_1 < z$ es también solución. Aplicando el mismo argumento iríamos encontrando ternas de números enteros cada vez más pequeños y todos ellos mayores que cero. Pero esto es imposible, ya que alguna terna tiene que ser la menor de todas, por lo que no puede existir solución con x, y, z positivos.

Análogamente se pueden analizar los casos en que alguna de las componentes de la terna sea negativa. Por ejemplo, si fuera $x > 0$, $y < 0$, $z > 0$, la ecuación queda transformada en

$$2x^3 - y^3 = 4z^3 \longrightarrow 2x^3 = y^3 + 4z^3,$$

donde ahora x, y, z son positivos los tres. Argumentando como antes, no hay soluciones enteras positivas de esta ecuación. Así pues, la única solución en números enteros es $x = y = z = 0$.

Solución 2.

Observemos que, si (x, y, z) es una solución del problema, entonces (kx, ky, kz) , con $k \in \mathbb{Z}$, también es solución. Por tanto, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que las soluciones se generan a partir de ternas (x, y, z) donde el máximo común divisor de x, y, z es igual a 1. Dicho de otro modo, x, y, z no tienen factores primos en común. Ahora bien, como hemos visto en la primera solución, si (x, y, z) es una solución de la ecuación, los tres números deben ser pares, lo que contradice que (x, y, z) no tienen factores primos en común. Por tanto, no puede existir solución, salvo que $x = y = z = 0$.

LVI Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Segunda sesión

Sábado mañana, 18 de enero de 2020

4. Ana y Bernardo juegan al siguiente juego. Se empieza con una bolsa que contiene $n \geq 1$ piedras. En turnos sucesivos, y empezando por Ana, cada jugador puede hacer los siguientes movimientos: si el número de piedras en la bolsa es par, el jugador puede coger una sola piedra o la mitad de las piedras. Si el número de piedras en la bolsa es impar, tiene que coger una sola piedra. El objetivo del juego es coger la última piedra. Determinar para qué valores de n Ana tiene una estrategia ganadora.

Solución.

Ana tiene una estrategia ganadora para $n = 1, 3$ y para todos los números pares mayores que 3. En primer lugar, observamos que en los casos $n = 1, 2, 3$ todos los movimientos están determinados y Ana gana cuando $n = 1$ o $n = 3$. Si el número inicial de piedras es par y mayor que 4, Ana puede coger una sola piedra, lo cual obliga a Bernardo a coger solamente otra. De esta manera, Ana puede forzar a que se llegue a una situación con 4 piedras en la bolsa en el momento de su turno. En este caso, Ana coge 2 piedras, lo cual deja a Bernardo en una posición perdedora y por lo tanto Ana gana el juego. De forma análoga, si el juego empieza con un número impar y mayor que 4 de piedras, Ana tiene que coger necesariamente una sola piedra, lo cual deja a Bernardo en una posición ganadora. Por consiguiente, Ana únicamente puede ganar si $n = 1, 3$ o el número es par y mayor que 3.

5. Determinar para qué valores de n existe un polígono convexo de n lados cuyos ángulos internos, expresados en grados, son todos enteros, están en progresión aritmética y no son todos iguales.

Solución.

Sea x la medida del ángulo mayor y d la diferencia de la progresión aritmética. Entonces, la suma de los ángulos del polígono será

$$x + (x - d) + (x - 2d) + \cdots + (x - (n - 1)d) = nx - \frac{dn(n - 1)}{2}.$$

Por otra parte, la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados es igual a $180(n - 2)$, por lo que se tiene

$$nx - \frac{dn(n - 1)}{2} = 180(n - 2). \quad (1)$$

De aquí se puede obtener una cota para el número de lados, sabiendo que el polígono es convexo y $x < 180$ y que $d \neq 0$. En efecto, manipulando la relación (1) se tiene que

$$720 = n(360 - 2x + d(n - 1)) > nd(n - 1).$$

De lo anterior deducimos que n tiene que ser un divisor de 720. Por otro lado, si la diferencia d es lo más pequeña posible, $d = 1$, entonces, el número de lados verifica $n(n - 1) < 720$, por lo que $n \leq 27$. Así, en el caso en que $d = 1$, n es un divisor de 720 menor o igual que 27, pero mayor o igual que 3, ya que se necesitan un mínimo de tres lados para cerrar el polígono. Entonces n es uno de los siguientes números

$$3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24$$

y se cumple para el ángulo mayor x

$$x = \frac{n - 1 + 360 - 720/n}{2}.$$

Si el número de lados es impar, el numerador de la fracción es par y x es un entero positivo, por lo que hay solución si $n = 3, 5, 9, 15$. Por el contrario, si el número de lados es par, $720/n$ tiene que ser impar, por lo que $n = 16$. Es decir, que si $d = 1$, existe tal construcción para polígonos de 3, 5, 9, 15 y 16 lados.

Si $d = 2$, el siguiente caso a considerar, tendríamos

$$720 > 2n(n - 1) \Rightarrow n \leq 19,$$

por lo que no hay soluciones para $n = 20, 24$, incluso si se tomara una d mayor. Ahora, para x se tiene la expresión

$$x = \frac{n - 2 + 360 - 720/n}{2}.$$

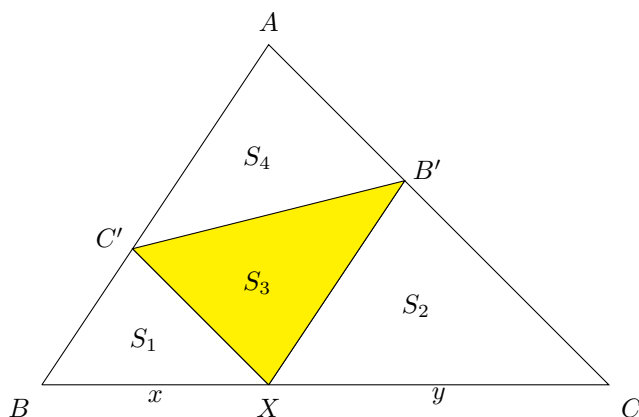
Si $n = 4, 6, 8, 10, 18$, el numerador de la fracción es par y x un número entero, por lo que en todos estos casos hay solución. Así pues, hay solución para $n = 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18$. En la tabla siguiente se dan los valores de n , x y d que dan lugar a solución.

	$d = 1$					$d = 2$					
n	3	5	9	15	16	4	6	8	10	12	18
x	61	110	144	163	165	91	122	138	148	155	168

6. Sea X un punto del lado BC de un triángulo ABC . Sean B' y C' puntos en los lados AC y AB , respectivamente, tales que el segmento XB' es paralelo al lado AB y el segmento XC' paralelo al lado AC . Probar que el área del triángulo $\Delta XB'C'$ es máxima cuando X es el punto medio del lado BC .

Solución 1.

Hagamos un dibujo con los datos del problema.



Observamos que el triángulo ha quedado dividido en cuatro triángulos cuyas áreas hemos denotado por S_1 , S_2 , S_3 y S_4 . Por ser $AB'XC'$ un paralelogramo, las áreas S_3 y S_4 son iguales, por lo que si S es el área del triángulo ΔABC resulta

$$S = S_1 + S_2 + 2S_3.$$

Por tanto, si demostramos que $S_1 + S_2 \geq \frac{1}{2}S$ el problema estará resuelto (notar que si X es el punto medio es obvio que el área de los cuatro triángulos es $S/4$). Ahora bien, los triángulos ΔABC , $\Delta C'BX$ y $\Delta B'XC$ son semejantes. Si h_1 es la altura del triángulo $\Delta C'BX$, h_2 la altura del triángulo $\Delta B'XC$ y h la altura del triángulo ΔABC , por la semejanza tenemos que:

$$h_1 = \frac{h}{x+y}x, \quad h_2 = \frac{h}{x+y}y.$$

Así pues,

$$S_1 = \frac{h}{x+y} \frac{x^2}{2}, \quad S_2 = \frac{h}{x+y} \frac{y^2}{2} \Rightarrow S_1 + S_2 = \frac{h}{x+y} \frac{x^2 + y^2}{2}.$$

Ahora bien, por la desigualdad entre la media de orden dos y la media aritmética

$$\frac{x^2 + y^2}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2} \right)^2 = \frac{(x+y)^2}{4}.$$

Por tanto,

$$S_1 + S_2 = \frac{h}{x+y} \frac{x^2 + y^2}{2} \geq \frac{h}{x+y} \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{h(x+y)}{4} = \frac{1}{2}S,$$

como queríamos demostrar. Es decir $S_3 \leq S/4$. La igualdad, y por tanto el valor máximo de S_3 , se da cuando $x = y$, es decir cuando X es el punto medio del lado BC .

Solución 2.

Una variante sobre la solución anterior usa el hecho de que no se pierde generalidad si suponemos que el lado BC tiene longitud igual a 1. Es decir $x + y = 1$.

Ahora procedemos parecido a como lo hemos hecho antes. Sabemos que los triángulos $\triangle ABC$, $\triangle C'BX$ y $\triangle B'XC$ son semejantes. En concreto la razón de semejanza entre $\triangle C'BX$ y $\triangle ABC$ es igual a x , mientras que la razón de semejanza entre $\triangle B'XC$ y $\triangle ABC$ es igual a $1 - x$. Así pues para las áreas se tiene

$$S_1 = x^2 S, \quad S_2 = (1 - x)^2 S.$$

Por tanto,

$$S_3 = \frac{1}{2}(S - S_1 - S_2) = \frac{S}{2}(1 - x^2 - (1 - x)^2) = S(x - x^2).$$

Completando el cuadrado en $x - x^2$, resulta

$$S_3 = S\left(\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2\right) \leq \frac{S}{4},$$

con igualdad cuando $x = 1/2$.