XLIX Olimpiada Matemática Española
Fase nacional 2013 (Bilbao)
Primera sesión (5 de abril)

Problema 1

Sean a, b y n enteros positivos tales que $a > b$ y $ab - 1 = n^2$. Prueba que

$$a - b \geq \sqrt{4n - 3}.$$

Indica justificadamente cuando se alcanza la igualdad.

Problema 2

Determina todos los números enteros positivos n, para los cuales

$$S_n = x^n + y^n + z^n$$

es constante, cualesquiera que sean x, y, z reales tales que, $xyz = 1$ y $x + y + z = 0$.

Problema 3

Sean k y n enteros, con $n \geq k \geq 3$. Se consideran $n+1$ puntos en el plano, no alineados entre sí tres a tres. A cada segmento que une entre sí dos de esos puntos se le asigna un color de entre k colores dados.

Se dice que un ángulo es *bicolor* si tiene por vértice uno de los $n+1$ puntos, y por lados, dos de los segmentos anteriores que sean de distinto color.

Demuestra que existe una coloración tal que el número de *ángulos bicolores* es estrictamente mayor que

$$n \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor^2 \binom{k}{2}.$$

OBSERVACIÓN: Se denota por $\lfloor t \rfloor$ la parte entera del número real t; es decir el mayor entero $n \leq t$.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre siete puntos.
El tiempo de cada sesión es de tres horas y media.

XLIX Olimpiada Matemática Española
Fase nacional 2013 (Bilbao)
Segunda sesión (6 de abril)

Problema 4

¿Existen infinitos enteros positivos que no pueden representarse de la forma

$$a^3 + b^5 + c^7 + d^9 + e^{11},$$

donde a, b, c, d, e son enteros positivos? Razónese la respuesta.

Problema 5

Estudia si existe una sucesión estrictamente creciente de enteros $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \dots,$ que cumple las dos condiciones siguientes:

i) Todo número natural puede ser escrito como suma de dos términos, no necesariamente distintos, de la sucesión.

ii) Para cada entero positivo n, se cumple que $a_n > \frac{n^2}{16}$.

Problema 6

Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo tal que:

$$|AB| + |CD| = \sqrt{2}\,|AC| \quad \text{y} \quad |BC| + |DA| = \sqrt{2}\,|BD|.$$

¿Qué forma tiene el cuadrilátero $ABCD$?

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre siete puntos.
El tiempo de cada sesión es de tres horas y media.