LII Olimpiada Matemática Española

Soluciones Fase Local

Viernes 15 y sábado 16 de enero de 2016

1. En la primera fila de un tablero 5×5 se colocan 5 fichas que tienen una cara blanca y otra negra, mostrando todas la cara blanca. Cada ficha se puede mover de una casilla a cualquiera de las contiguas (horizontal o verticalmente) dándole la vuelta en cada movimiento. Además, varias fichas pueden ocupar una misma casilla. ¿Se puede conseguir mediante una secuencia de movimientos que las 5 fichas queden en la última fila, en casillas distintas y que todas ellas muestren la cara negra?

Solución.

Si pintamos las casillas del tablero alternativamente de blanco y negro como en un tablero de ajedrez, sucede que una ficha cuyo color visible coincida con el de la casilla, al moverse seguirá teniendo el mismo color que la nueva casilla (puesto que tanto el color de la ficha como el de la casilla cambian). Supuesto que la casilla superior izquierda la hemos dejado blanca, en el inicio hay 3 fichas cuyo color (blanco) coincide con el de la casilla. En todo momento deberá suceder que el color de tres fichas es el mismo que el de la casilla que ocupen (y el de las otras dos, diferente). Sin embargo, colocando las fichas con la cara negra en la última fila, resulta que sólo dos fichas tendrán el color (negro) de su casilla. Por lo tanto, no es posible colocar las fichas de esta manera.

2. Cada 20 minutos, durante una semana, se trasvasa un número entero de litros de agua (siempre la misma cantidad) desde un tanque con 25000 litros a otro depósito inicialmente vacío. Desde este segundo depósito, a intervalos regulares de tiempo, se extrae primero 1 litro, luego 2, luego 3, etc. Justo al final de la semana coinciden el último trasvase y la última extracción, quedando en ese momento vacío el segundo depósito. Determinar cuánta agua se ha extraído en total durante la semana, en caso de que los datos del problema lo permitan. (Se supone que los trasvases y las extracciones se realizan instantáneamente. El primer trasvase se hace pasados los primeros 20 minutos y la primera extracción, pasado el primer intervalo de tiempo.)

Solución.

Sea n el número de extracciones de agua realizadas durante la semana. En total se habrán extraído $T_n = 1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2$

litros. Por otro lado, si el caudal que se trasvasa cada 20 minutos al segundo depósito es de k litros, el total de litros que ha entrado es $7\times24\times3\times k = 2^3\times3^2\times7\times k$, así que $2^3\times3^2\times7\times k = n(n+1)/2$ y esta cantidad tiene que ser ≤ 25000, por tanto $2^4\times3^2\times7\times k = n(n+1) \leq 50000$. De aquí se deduce que $n \leq 223$, pues $224 \times 225 > 50000$.

Por otra parte, al ser n y $n+1$ números consecutivos uno de ellos es par y el otro impar. Por tanto uno de ellos es múltiplo de 16. Como $224 = 16\times14$ podemos comprobar los casos que pueden darse. Como el producto de los dos números, n y $n+1$, debe ser también múltiplo de 7 y 9, la única solución posible es para $k = 4$ con $n = 63$ y $n + 1 = 64$.

n	$n+1$	n	$n+1$
31	32	128	129
32	33	143	144
47	48	144	145
48	49	159	160
63	**64**	160	161
64	65	175	176
79	80	176	177
80	81	191	192
95	96	192	193
96	97	207	208
111	112	208	209
112	113	223	224
127	128		

Por lo tanto el volumen total extraído es $T_{63} = 63 \times 64/2 = 2016$ litros.

3. Sea $n \geq 1$ y $P(x)$ un polinomio con coeficientes enteros que cumple que los números $P(1), P(2), \ldots, P(n)$ son $1, 2, \ldots, n$ (no necesariamente en este orden). Demostrar que uno de los números $P(0)$ o $P(n + 1)$ es múltiplo de $n!$.

Solución.

En primer lugar nos damos cuenta de que el polinomio $P(x) = x$ cumple todos los requisitos del problema. En efecto, se tiene que es de coeficientes enteros y además

$$P(1) = 1,\ P(2) = 2,\ \ldots,\ P(n) = n. \tag{1}$$

Por otra parte, $P(0) = 0$, que es un múltiplo de $n!$. A partir de $P(x =$ podemos construir nuevos polinomios que verifican (1). Para ello, basta sumar a $P(x)$ cualquier polinomio que se anule en

$1, 2, \ldots, n$. Así, si $p(x)$ es un polinomio cualquiera de coeficientes enteros, resulta que

$$\bar{P}(x) = p(x)(x-1)(x-2)\cdots(x-n) + x,$$

es un polinomio con coeficientes enteros que cumple que $\bar{P}(k) = k$, si $k = 1, \ldots, n$. Evaluando el polinomio en 0 tenemos

$$P(0) = (-1)^n p(0) n!,$$

que claramente es múltiplo de $n!$.

El polinomio anterior es uno en que los valores que toma en los números de 1 a n van en orden creciente. Si los tomamos en orden decreciente podemos llegar a un resultado similar a partir del polinomio $Q(x) = n + 1 - x$. En este caso el polinomio

$$\bar{Q}(x) = q(x)(x-1)(x-2)\cdots(x-n) + n + 1 - x,$$

con $q(x)$ un polinomio de coeficientes enteros cualquiera, es un polinomio con coeficientes enteros que verifica $\bar{Q}(k) = n + 1 - k$, si $k = 1, \ldots, n$ y

$$\bar{Q}(n+1) = q(0) n!,$$

que es múltiplo de $n!$.

Si probamos que los valores que toma el polinomio para $x = 1, \ldots, n$ están en orden creciente o decreciente, es inmediato ver que las soluciones anteriores son las únicas posibles. Para ver esto tenemos en cuenta que, si i y j son dos números enteros, se tiene que

$$i^k - j^k = (i-j)(i^{k-1} + i^{k-2}j + \cdots + ij^{k-2} + j^{k-1})$$

es múltiplo de $i - j$. Entonces, dado

$$P(x) = a_m x^m + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

resulta que

$$P(i) - P(j) = a_m(i^m - j^m) + \cdots + a_2(i^2 - j^2) + a_1(i - j)$$

es múltiplo de $i-j$. En particular, $P(n) - P(1)$ es múltiplo de $n-1$. Como $P(1)$ y $P(n)$ son enteros distintos entre 1 y n tiene que ser $P(1) = 1$ y $P(n) = n$ o al revés, $P(1) = n$ y $P(n) = 1$. En el primer caso, $n - 2 = (n-1) - 1$ divide a $P(n-1) - P(1) = P(n-1) - 1$ y $2 \leq P(n-1) \leq n-1$, luego tiene que ser $P(n-1) = n-1$ y, similarmente $P(n-2) = n-2$, etc. De forma parecida se ve que en el segundo caso $P(n-1) = 2$, $P(n-2) = 3$, etc.

4. Para pertenecer a un club cada nuevo socio debe pagar como cuota de inscripción a cada miembro del club la misma cantidad que él tuvo que pagar en total cuando ingresó más un euro. Si el primer socio pagó un euro, ¿cuanto deberá pagar en total el n-ésimo socio?

Solución.

Llamemos a_n la cantidad que tiene que pagar el n-ésimo socio por entrar en el club. Entonces se tiene que $a_2 = 2$, ya que habrá pagado el euro que pagó el primer socio más un euro más, mientras que el n-ésimo socio pagará

$$a_k = (a_1 + 1) + (a_2 + 1) + \cdots + (a_{n-2} + 1) + (a_{n-1} + 1).$$

Ahora bien, la suma anterior hasta $(a_{n-2} + 1)$ es igual a a_{n-1}, por lo que

$$a_n = 2a_{n-1} + 1, \qquad n > 2.$$

Analicemos un poco la sucesión:

$$a_3 = 2a_2 + 1,\ a_4 = 4a_2 + 3,\ a_5 = 8a_2 + 7,\ a_6 = 16a_2 + 15,\ \ldots.$$

Parece claro que

$$a_n = a_2 2^{n-2} + 2^{n-2} - 1 = (a_2 + 1)2^{n-2} - 1 = 3 \cdot 2^{n-2} - 1,$$

teniendo en cuenta que $a_2 = 2$.

Completamos la prueba por inducción. Como ya hemos visto que $a_2 = 2$, solo falta probar que si $a_k = 3 \cdot 2^{k-2} - 1$, entonces se cumple que $a_{k+1} = 3 \cdot 2^{k-1} - 1$. Usando la ecuación que define la sucesión

$$a_{k+1} = 2a_k + 1 = 2(3 \cdot 2^{k-2} - 1) + 1 = 3 \cdot 2^{k-1} - 1.$$

En consecuencia lo que tiene que pagar el n-ésimo socio es $3 \cdot 2^{n-2} - 1$ euros.

5. Dos circunferencias C y C' son secantes en dos puntos P y Q. La recta que une los centros corta a C en R (interior a la circunferencia C') y a C' en R' (interior a la circunferencia C); la que une P y R' corta a C en $X \neq P$ y la que une P y R corta a C' en $X' \neq P$. Si los tres puntos X, Q, X' están alineados se pide:

(i) Hallar el ángulo $\angle XPX'$.

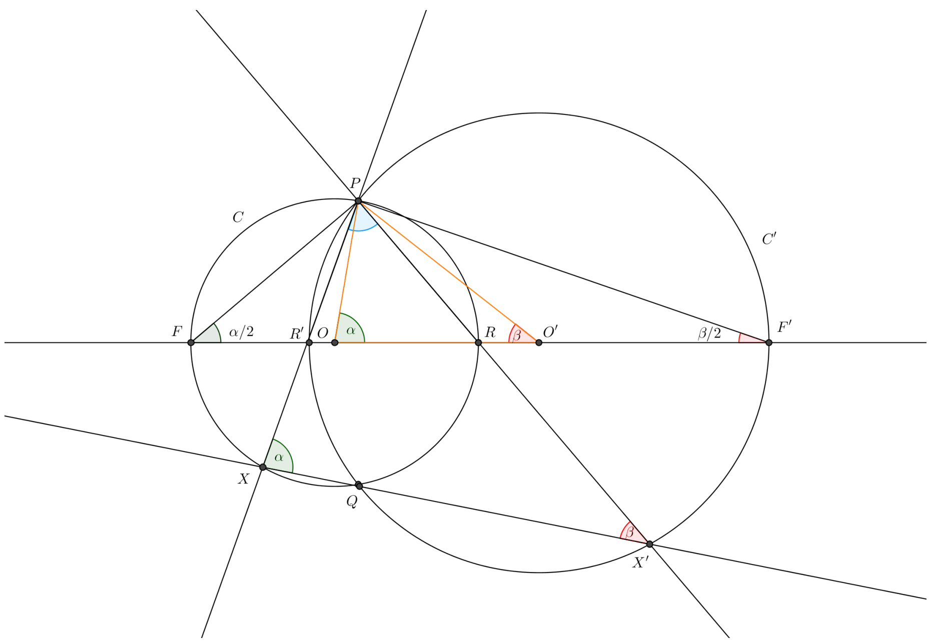
(ii) Demostrar que $(d + r - r')(d - r + r') = rr'$, donde d es la distancia entre los centros de las circunferencias y r, r' sus radios.

Solución.

(i) Sean F y F' los puntos diametralmente opuestos a R y R' en C y C, respectivamente. Por el Teorema del ángulo inscrito se tiene que $\angle PFQ = \angle PXQ = \alpha$ que, por simetría, es el doble de $\angle PFR$, luego $\angle PFR = \alpha/2$. Como el triángulo PFR es rectángulo en P (al ser FR diámetro de C), deducimos que $\angle PRF = \pi/2 - \alpha/2$. Similarmente, $\angle PR'F' = \pi/2 - \beta/2$, donde $\beta = \angle PX'Q$. Por otro lado, considerando el triángulo XPX', $\angle XPX' = \pi - \alpha - \beta$, luego sumando los ángulos del triángulo PRR',

$$\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}\right) + (\pi - \alpha - \beta) = \pi,$$

es decir $\alpha + \beta = 2\pi/3$ y $\angle XPX' = \pi/3$.



(ii) Consideramos el triángulo OPO', donde O y O' son los centros de C y C', respectivamente. Nuevamente, por el Teorema del ángulo inscrito, el ángulo central $\angle POR$ es $2\angle PFR = \alpha$ y similarmente $\angle PO'R' = 2\angle PF'R' = \beta$, luego $\angle OPO' = \pi/3$. Los lados del triángulo OPO' son los radios r y r' y la distancia d entre los centros, por tanto el resultado se sigue directamente del Teorema del coseno: $d^2 = r^2 + r'^2 - rr'$, que es equivalente a la relación dada en el enunciado.

6. Encontrar cuántas soluciones enteras tiene la ecuación

$$|5 - x_1 - x_2| + |5 + x_1 - x_2| + |5 + x_2 + x_3| + |5 + x_2 - x_3| = 20.$$

Solución.

Aplicando la desigualdad triangular $|x+y| \leq |x|+|y|$, tenemos que:

$$20 = |(5-x_1-x_2)+(5+x_1-x_2)+(5+x_2+x_3)+(5+x_2-x_3)| \leq$$
$$|5-x_1-x_2|+|5+x_1-x_2|+|5+x_2+x_3|+|5+x_2-x_3| = 20.$$

Es decir, se tiene una igualdad y entonces los sumandos $(5-x_1-x_2)$, $(5+x_1-x_2)$, $(5+x_2+x_3)$, $(5+x_2-x_3)$ son todos ellos no negativos al mismo tiempo, ya que es evidente que no pueden ser negativos, pues su suma es 20.

Fijémonos en el valor de x_2. Su valor absoluto no puede ser mayor que 5. Por ejemplo, si $x_2 > 5$ entonces

$$5-x_1-x_2 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq 5-x_2 < 0$$

y, por otra parte,

$$5+x_1-x_2 \geq 0 \Rightarrow x_1 \geq x_2-5 > 0,$$

que es claramente contradictorio. Así, $|x_2| \leq 5$.

Analicemos ahora cada uno de los casos, teniendo en cuenta que hay simetría entre los valores positivos y negativos de x_2.

Si $x_2 = 0$, entonces $|x_1| \leq 5$ y $|x_3| \leq 5$. Es decir x_1 y x_3 pueden tomar 11 valores diferentes cada uno, por lo que habrá 121 soluciones en este caso.

Si $x_2 = 1$, entonces $|x_1| \leq 4$ y $|x_3| \leq 6$. Es decir x_1 puede tomar 9 valores distintos y x_3 13, dando lugar a $9 \times 13 = 117$ soluciones.

Procediendo de manera análoga con los otros valores de x_2, y teniendo en cuenta la simetría, el número total de soluciones es

$$11\times 11+2\times 9\times 13+2\times 7\times 15+2\times 5\times 17+2\times 3\times 19+2\times 1\times 21 = 891.$$