XLVII Olimpiada Matemática Española
Fase Nacional

Pamplona, Marzo de 2011

Enunciados

Primera sesión. Viernes 25 de marzo

Problema uno

En un polígono regular de 67 lados trazamos todos los segmentos que unen dos vértices, incluidos los lados del polígono. Elegimos n de estos segmentos y asignamos a cada uno de ellos un color entre 10 colores posibles. Halla el valor mínimo de n que garantiza, que independientemente de cuáles sean los n segmentos elegidos y de cómo se haga la asignación de colores, siempre habrá un vértice del polígono que pertenece a 7 segmentos del mismo color.

Problema dos

Sean a, b, c números reales positivos. Demuestra que

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}} \geq \frac{5}{2}$$

¿Cuándo se alcanza la igualdad?

Problema tres

Sean A, B, C, D cuatro puntos en el espacio, tales que no hay ningún plano que pasa por los cuatro a la vez. Los segmentos AB, BC, CD, DA son tangentes a una misma esfera. Demuestra que los cuatro puntos de tangencia están en un mismo plano.

Segunda sesión. Sábado 26 de marzo

Problema cuatro

Sea ABC un triángulo con $\angle B = 2\angle C$. Sean D el punto de la recta AB tal que CD es perpendicular a AC y M el punto medio de BC. Demuestra que $\angle AMB = \angle DMC$.

Problema cinco

Cada número racional se pinta de un color, usando sólo dos colores, blanco y rojo. Se dice que una tal coloración es sanferminera cuando para cada dos números racionales x, y con $x \neq y$, si se cumple una de las tres condiciones siguientes:

1. $xy = 1$,
2. $x + y = 0$,
3. $x + y = 1$,

entonces x e y están pintados de distinto color. ¿Cuántas coloraciones sanferminera hay?

Problema seis

Sea (S_n) con $n \geq 0$ la sucesión definida por

1. $S_n = 1$ para $0 \leq n \leq 2011$.
2. $S_{n+2012} = S_{n+2011} + S_n$ para $n \geq 0$.

Prueba que, para todo entero no negativo a se cumple que $S_{2011a} - S_a$ es múltiplo de 2011.

Soluciones

Problema dos

Sean a, b, c números reales positivos. Demuestra que

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\geq\frac{5}{2}$$

¿Cuándo se alcanza la igualdad?

Recordamos la desigualdad Cauchy - Schwartz:

Teorema 1 (Desigualdad Cauchy - Schwartz)**.** *Sean a_1, b_1 $\ldots$,a_j, $b_j\ldots$,a_n, b_n números reales. Se tiene que*

$$(a_1b_1+\cdots a_jb_j+\cdots+a_nb_n)^2\leq\left(a_1^2+\cdots a_j^2+\cdots+a_n^2\right)\left(b_1^2+\cdots b_j^2+\cdots+b_n^2\right)$$

y la igualdad se da si y sólo si $a_1=\cdots=a_j=\cdots=a_n=0$ o existe t número real tal que

$$b_1=ta_1,\ldots,b_j=ta_j,\ldots b_n=ta_n.$$

Más concretamente, para resolver esta problema, utilizamos la fomulación de Arthur Engel de esta desigualdad:

Teorema 2 (Fomulación de Engel de la desigualdad de Cauchy -Schwartz)**.** *Sean x_1, $\ldots$,x_j, $\ldots$,x_n números reales. Sean y_1, $\ldots$, y_j, $\ldots y_n$ números reales postivos. Se tiene que*

$$\frac{x_1^2}{y_1}+\cdots\frac{x_j^2}{y_j}+\cdots\frac{x_n^2}{y_n}\geq\frac{(x_1+\cdots x_j+\cdots+x_n)^2}{y_1+\cdots y_j+\cdots+y_n}$$

y la igualdad se da si y sólo si

$$\frac{x_1}{y_1}=\cdots\frac{x_j}{y_j}=\cdots=\frac{x_n}{y_n}.$$

Solución. Gracias a la desigualdad de Cauchy -Schwartz - Engel

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} &= \frac{a^2}{a(b+c)}+\frac{b^2}{b(c+a)}+\frac{c^2}{c(a+b)} \\
&\geq \frac{(a+b+c)^2}{a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)} \qquad (1)\\
&= \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} \\
&= \frac{(a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)}{2(ab+bc+ca)} \\
&= 1+\frac{1}{2}\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}
\end{aligned}$$

donde la igualdad se da si y sólo si

$$\frac{a}{a(b+c)}=\frac{b}{b(c+a)}=\frac{c}{c(a+b)}. \qquad (2)$$

Denotamos $t=\sqrt{\dfrac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}$, de modo que $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}=\dfrac{1}{t^2}$. Ahora basta probar que

$$1+\frac{1}{2t^2}+t\geq\frac{5}{2}.$$

Notamos que $t>0$. Quitando denominadores y llevando elementos al término izquierdo, observamos que esta desigualdad equivale a

$$2t^3-3t^2+1\geq 0. \qquad (3)$$

Ahora factorizamos el polinomio $2x^3-3x^2+1$. Podemos justificar su factorización de muchas maneras. Por ejemplo, podemos notar que, desde el comienzo, para $a=b=c$ se da la igualdad, y $t=1$. Por tanto, 1 es una raíz del polinomio. Dividiendo (por ejemplo, mediante la regla de Ruffini) llegamos a $2x^3-3x^2+1=(x-1)(2x^2-x-1)$. Mediante la fórmula para calcular las raíces de un polinomio de grado 2, obtenemos que 1, $-1/2$ son las raíces de $2x^2-x-1$. Por tanto,

$$2x^3-3x^2+1=(x-1)^2(2x+1).$$

Ahora es claro que $2t^3-3t^2+1\geq 0$, y que la igualdad se da sólamente para $t=1$.

Ya hemos obtenido la desigualdad. Veamos cuándo se da la igualdad. Para ello es necesario y suficiente que (1) y (3) sean igualdades. Observamos que (2) equivale a

$$\frac{1}{b+c}=\frac{1}{c+a}=\frac{1}{a+b},$$

que es lo mismo que

$$b+c=c+a=a+b,$$

que se da si y sólo si $a=b=c$. Además, para $a=b=c$, se tiene que $t=1$, y da la igualdad en (3). por tanto, la igualdad se tiene si y sólo si $a=b=c$. $\square$

Comentario. *Gracias a la desigualdad de Cauchy - Schwartz,*

$$ab + bc + ca \leq (a^2 + b^2 + c^2)^{1/2}(b^2 + c^2 + a^2)^{1/2} = a^2 + b^2 + c^2. \tag{4}$$

Por tanto, $0 < t \leq 1$, *y* $t = 1$ *sólo cuando*

$$\text{existe } s \in (0, +\infty) \text{ tal que } a = sb,\ b = sc,\ c = sa. \tag{5}$$

Cuando $s \neq 1$, *esta cadena de igualdades conduce a* $a < a$. *O sea, tiene que ser* $s = 1$. *Por tanto (5) se da si y sólo si* $a = b = c$.

Concluimos que

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

con igualdad si y sólo si $a = b = c$, *(desigualdad de Nessbit).*

Problema tres

Sean A, B, C, D cuatro puntos en el espacio, tales que no hay ningún plano que pasa por los cuatro a la vez. Los segmentos AB, BC, CD, DA son tangentes a una misma esfera. Demuestra que los cuatro puntos de tangencia están en un mismo plano.

Utilizaremos los siguientes resultados:

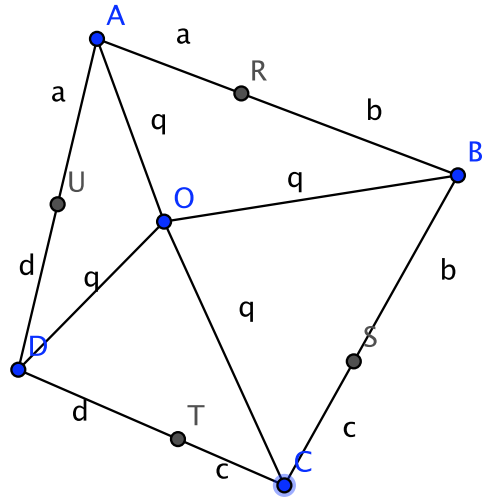
Lema. *Dado un segmento* GH *y un número positivo* $t \neq 1$ *existe un único punto* K *en la prolongación del segmento tal que* $\dfrac{GK}{KH} = t$.

Lema. *Sea* A *un punto exterior a una circunferencia* γ. *Sean* X, Y *puntos de* γ *tales que* AX, AY *son tangentes a* γ. *Entonces* $AX = AY$.

Teorema 3 (de Menelao)**.** *Consideramos un triángulo* ABC *y puntos* X *en el segmento* AB, Y *en el segmento* BC, Z *en la prolongación del segmento* BC. *Se tiene que* X, Y, Z *están alineados si y sólo si*

$$\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BY}{YC} \cdot \frac{CZ}{ZA} = 1.$$

Solución. Mostramos una proyección de la figura.



R, S, T, U son los puntos de tangencia en los segmentos AB, BC, CD, DA.

Observamos que la sección de la esfera con el plano que contiene al triángulo ABD muestra una circunferencia y dos rectas, AB, AD, tangentes a ella en puntos R, U. Por tanto $AR = AU$.

Lo mismo vale en el resto de los vértices. En cada uno de ellos los dos segmentos que lo unen con los puntos de tangencia tienen igual longitud. Llamamos a, b, c, d a los longitudes en cada uno de los vértices A, B, C, D.

Tenemos un triángulo ABD con R punto en el lado AB, U punto en AD. Sea F la intersección de la recta BD con la recta UR. Notamos que F es exterior a BD. Por el teorema de Menelao

$$\frac{BR}{RA}\frac{AU}{UD}\frac{DF}{FB} = 1.$$

O sea

$$\frac{b}{a}\frac{a}{d}\frac{DF}{FB} = 1.$$

Luego

$$\frac{DF}{FB} = \frac{d}{b}.$$

Llevamos este argumento al vértice C. Si pensamos en el triángulo CBD, y llamamos E al punto de intersección del segmento ST con el lado BD. Se tiene

$$\frac{DE}{EB} = \frac{d}{b}.$$

Por tanto $E = F$.

Consideramos el plano que contiene a los puntos $E = F, R, S$. Contiene a las rectas FR (luego a U) y ES (luego a T).

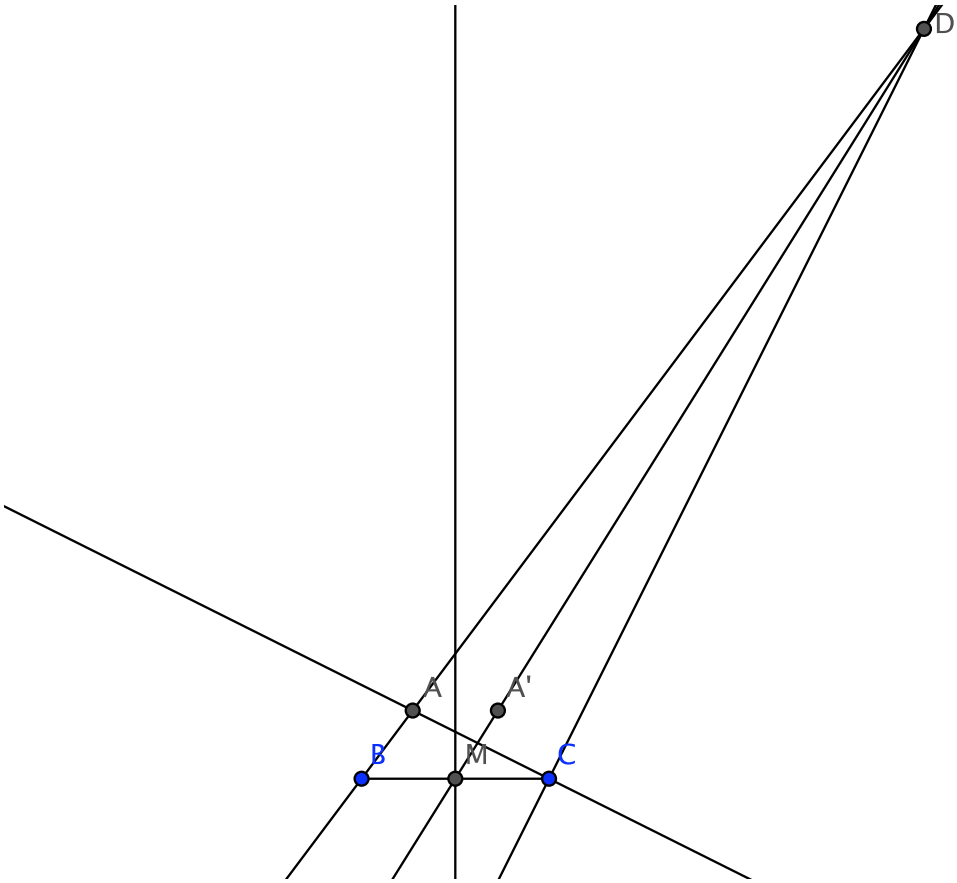
$\square$

Problema cuatro

Sea ABC un triángulo con $\angle B = 2\angle C$. Sean D el punto de la recta AB tal que CD es perpendicular a AC y M el punto medio de BC. Demuestra que $\angle AMB = \angle DMC$.

Escolio. *Notamos que lo que la tesis del problema equivale a que las rectas MA, MD son simétricas respecto de la perpendicular a perpendicular a BC por M (la mediatriz de BC).*

Solución 1.



Colocamos los elementos del problema en un sistema cartesiano de coordenadas.

Sin pérdida de generalidad $B = (-1, 0)$, $C = (1, 0)$, A por encima del eje OX.

El punto medio del lado BC es el origen de coordenadas: $M = (0, 0)$.

La mediatriz del lado BC es el eje OY $(x = 0)$.

Llamamos m a la tangente del ángulo en C. Se tiene que $3 \cdot \angle C \leq \pi$. Luego $\angle C \leq \pi/3$. Por tanto $0 \leq m \leq \sqrt{3}$.

Notamos que la tangente del ángulo en B es $\dfrac{2m}{1 - m^2}$.

La recta (b) que contiene al lado AC tiene ecuación

$$y = -m(x - 1).$$

La recta (c) que contiene al lado AB tiene ecuación

$$y = \frac{2m}{1-m^2}(x+1).$$

La recta (d) perpendicular a AC por C tiene ecuación

$$y = \frac{1}{m}(x-1).$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones que forman b y c obtenemos el punto A.

$$A = \left(\frac{m^2+1}{3-m^2}, \frac{4\,m}{3-m^2}\right)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones que forman b y d obtenemos el punto D.

$$D = \left(-\frac{m^2+1}{3\,m^2-1}, -\frac{4\,m}{3\,m^2-1}\right)$$

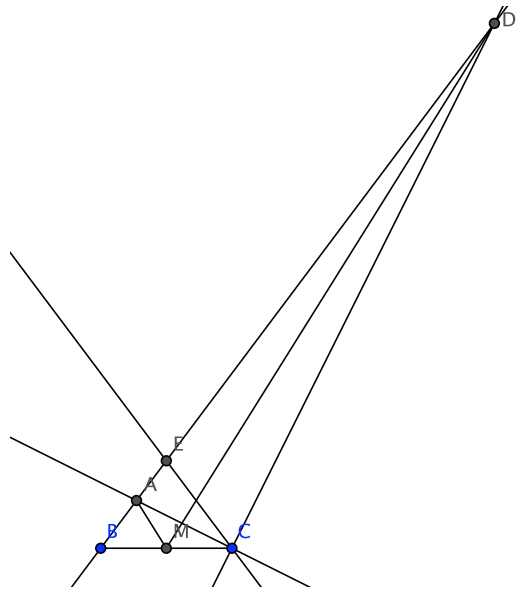
El simétrico de A respecto de la mediatriz del lado BC es

$$A' = \left(-\frac{m^2+1}{3-m^2}, \frac{4\,m}{3-m^2}\right)$$

Por tanto

$$MD = \frac{3-m^2}{3\,m^2-1} MA'$$

y los puntos M, A', D están alineados. □



Solución 2.

Utilizamos el teorema de la bisectriz, que recordamos:

Teorema 4 (de la bisectriz)**.** *En un triángulo ABC consideramos un punto D del lado BC y un punto E de su prolongación.*

- *AD es la bisectriz interior en A si y sólo si* $\dfrac{BD}{CD} = \dfrac{AB}{AC}$.
- *AE es la bisectriz exterior en A si y sólo si* $\dfrac{BE}{CE} = \dfrac{AB}{AC}$.
- *AD, AE son bisectrices interior y exterior si y sólo si son perpendiculares y* $\dfrac{BD}{CD} = \dfrac{BE}{CE}$.

Consideramos el punto E de la recta AB tal que BEC es isósceles en E.

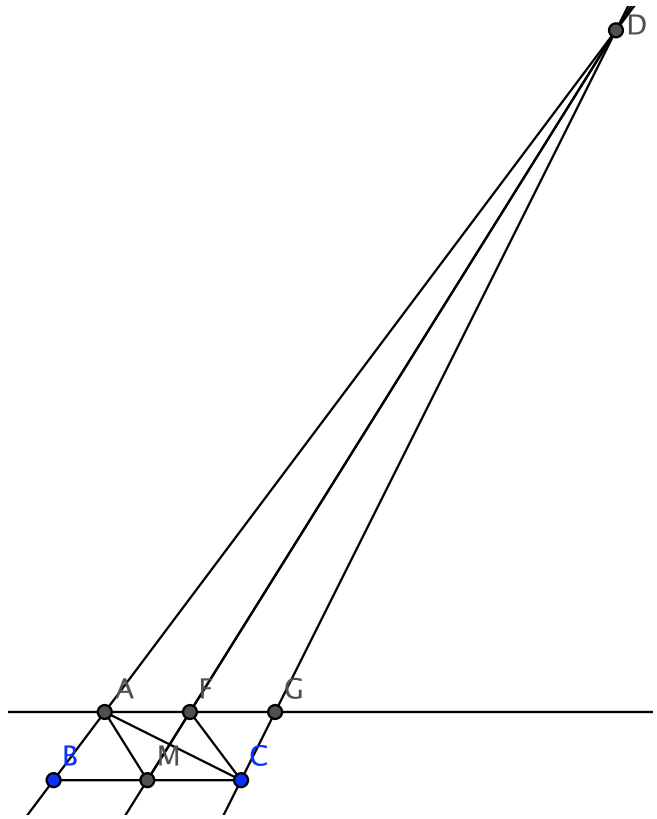
Miramos al triángulo BCE Se tiene que CA es bisectriz interior. Luego CD es bisectriz exterior. Por tanto

$$\frac{BA}{EA} = \frac{BD}{ED}.$$

Miramos al triángulo AMD. El punto E es interior al segmento AD, el punto B está en la prolongación, Tenemos que ME, MB son perpendiculares. Además,

$$\frac{DE}{AE} = \frac{DB}{AB}.$$

Por tanto ME es la bisectriz interior al triángulo en el punto M. □



Solución 3.

Llamamos α al ángulo en C.

El ángulo en B es 2α.

Tomamos F, G las intersecciones entre la paralela a BC que pasa por A y, respectivamente DM, DB.

Por el teorema de Thales F es el punto medio de A, G.

Como el ángulo ACG es recto, se tiene que C está en la circunferencia centrada en F que pasa por A y por G. Luego $AF = GF = CF$.

En el triángulo AFC los lados que concluyen en F son iguales. Luego es isósceles en F. Luego coindiden los ángulos en A y en C. O sea

$$\angle FAC = \angle FCA.$$

Puesto que las rectas AF, BC son paralelas

$$\angle FAC = \angle BCA = \alpha.$$

Por tanto

$$\angle BCF = \alpha + \alpha = 2\alpha.$$

O sea

$$\angle BCF = \angle CBA.$$

El trapecio $BCFA$ es isósceles. Concluimos que A y F son simétricos respecto de la perpendicular a B por M. O sea, las rectas AM y MF, que es la misma que MD, son simétricas respecto de la perpendicular a B por M. □

Solución 4. Aplicaremos el teorema de Menelao (teorema 3) y el teorema de la bisectriz (teorema 4)

Llamamos A' al simétrico de A respecto de la mediatriz del lado BC. Hay que ver que los puntos M, A', D están alineados.

Consideramos el punto E de la recta AB tal que BEC es isósceles en E. Notamos que A' está en el lado EC. Además, M está en el lado BC y D está en la prolongación de AD. Gracias al teorema de Menelao basta ver que

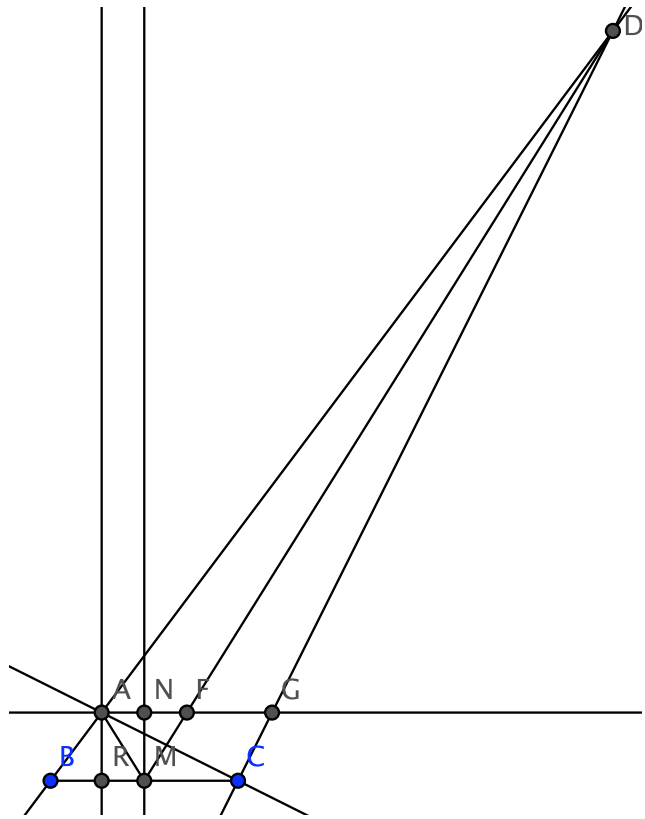
$$\frac{BM}{MC} \cdot \frac{CA'}{A'E} \cdot \frac{ED}{DB} = 1. \tag{6}$$

Como M es el punto medio de BC, $\dfrac{BM}{MC} = 1$.

Utilizando la simetría respecto de la mediatriz por M del triángulo BEC, $\dfrac{CA'}{A'E} = \dfrac{BA}{AE}$.

Por el teorema de la bisectriz, $\dfrac{ED}{DB} = \dfrac{EA}{AB}$.

Por tanto, se tiene (6). □



Solución 5.

Tomamos F, G las intersecciones entre la paralela a BC que pasa por A y, respectivamente DM, DB. Tomamos N la intersección es entre la paralela a BC por A y la mediatriz de BC.

Hay que probar que A y F son simétricos respecto de la mediatriz de BC, que reformulamos como $AN = NF$. Esto equivale a que $2 \cdot AN = AF$.

Por el teorema de Thales F es el punto medio de A, G. Por tanto basta probar que $4 \cdot AN = AG$.

Llamamos R a la proyección ortogonal de A sobre la recta BC, que está en el segmento BM. Se tiene que $AN = RM$. Además, puesto M es el punto medio de BC se tiene que $RM = BM - BR = \frac{1}{2}BC - BR$. Basta probar que

$$2 \cdot BC - 4 \cdot BR = AG.$$

Por tanto, basta probar que $4 \cdot RM = AG$.

Expresamos ahora longitudes en términos del ángulo en C del triángulo ABC, que llamamos α.

El ángulo en B del triángulo ABC es 2α.

El ángulo en C del triángulo ABC es $\pi - 3\alpha$.

Por el teorema del seno, aplicado al triángulo, ABC, hay una cosntante K tal que

$$\begin{aligned} AB &= K\sin(\alpha) \\ AC &= K\sin(2\alpha) \\ BC &= K\sin(3\alpha) \end{aligned}$$

Miramos al triángulo BRA. El ángulo en A es 2α. El ángulo en R es recto. En consecuencia, $BR = AB \cdot \cos(2\alpha)$. Por tanto

$$BR = K\sin(\alpha)\cos(2\alpha).$$

Miramos al triángulo ACG. Puesto que la recta AG es paralela a la recta BC, el ángulo en A es α. El ángulo en C es recto. En consecuencia, $AG = AC \cdot \dfrac{1}{\cos(\alpha)}$. Por tanto

$$AG = K\frac{\sin(2\alpha)}{\cos(\alpha)}.$$

Concluimos que basta probar que

$$2K\sin(3\alpha) - 4K\sin(\alpha)\cos(2\alpha) = K\frac{\sin(2\alpha)}{\cos(\alpha)}.$$

que es equivalente a

$$2\sin(3\alpha)\cos(\alpha) - 4\cos(\alpha)\sin(\alpha)\cos(2\alpha) = \sin(2\alpha).$$

Finalizamos con la siguiente manipulación trigonométrica:

$$\begin{aligned}
2\sin(3\alpha)\cos(\alpha) - 4\cos(\alpha)\sin(\alpha)\cos(2\alpha) &= 2\sin(3\alpha)\cos(\alpha) - 2\sin(2\alpha)\cos(2\alpha)\\
&= 2\sin(3\alpha)\cos(\alpha) - \sin(4\alpha)\\
&= 2\sin(3\alpha)\cos(\alpha) - \sin(3\alpha+\alpha)\\
&= 2\sin(3\alpha)\cos(\alpha) - \sin(3\alpha)\cos(\alpha) - \cos(3\alpha)\sin(\alpha)\\
&= \sin(3\alpha)\cos(\alpha) - \cos(3\alpha)\sin(\alpha)\\
&= \sin(3\alpha-\alpha)\\
&= \sin(2\alpha).
\end{aligned}$$

□

Problema cinco

Cada número racional se pinta de un color, usando sólo dos colores, blanco y rojo. Se dice que una tal coloración es sanferminera cuando para cada dos números racionales x, y con $x \neq y$, si se cumple una de las tres condiciones siguientes:

1. $xy = 1$,
2. $x + y = 0$,
3. $x + y = 1$,

entonces x e y están pintados de distinto color. ¿Cuántas coloraciones sanfermineras hay?

Solución. Comenzamos definiendo los conceptos que vamos a utilizar.

Definición. *Definimos coloraciones sanfermineras en subconjuntos de* $\mathbb{Q}$.

Definición. *Definimos, dado* $0 \leq a < 1$,

$$R_a = \{a, -a, 1+a, -1-a, 2+a, \dots\}.$$

Definición. *Dado* $d \in \mathbb{N}$ *llamamos* $\mathbb{Q}_d$ *al conjunto de números racionales con denominador* d *en su expresión irreducible.*

Definición. *Decimos que dos números* x, y *están relacionados si existe una sucesión*

$$x = x_0, \dots, x_j, \dots x_n = y$$

tal que dos elementos consecutivos cumplen una de la tres identidades del problema.

Escolio. $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ *se parte en unión disjunta de conjuntos* $\mathbb{Q}_d$.

Escolio. *Para* $d > 1$, $\mathbb{Q}_d$ *se parte en unión disjunta de los conjuntos* R_a *con* $a \in \mathbb{Q}_d$. *(*$0 < a < 1$*).*

Escolio. $\mathbb{Q}_1 = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Escolio. $R_0 = \mathbb{Z}$.

Escolio. *En un subconjunto en el que todos los elementos están relacionados, o bien no hay ninguna coloración sanferminera, o bien hay dos, y una se obtiene intercambiando los colores de la otra.*

Escolio. *Dado* $0 < x < 1$ *hay un único* y *tal que* $xy = 1$. *Se tiene que* $x \in \mathbb{Q}_d$, $y \in \mathbb{Q}_e$ *con* $e < d$.

Escolio. *Si* $x + y = 0$ *entonces* x *e* y *están en un mismo conjunto* R_a.

Lema. *Si* $x + y = 1$, *entonces, o bien* $0 < x$, $y < 1$, *o bien uno de ellos es positivo y el otro negativo o nulo. En este segundo caso están en un mismo* R_a.

Lema. *Dado* $0 \leq a < 1$, *todos los elementos en* R_a *están relacionados. Además dar el color blanco a los positivos y rojo a los negativos o nulos es una coloración sanferminera en* R_a.

Lema. *Dos racionales cualesquiera están relacionados.*

Demostración. Si $x \in \mathbb{Q}_d$, con $d > 1$, se tiene que, para algún $0 < a < 1$, x está en R_a, con $0 < a < 1$. Entonces x está relacionado con a.

$0 < a < 1$ tiene que a está relacionado con $\dfrac{1}{a}$. Además a está en $\mathbb{Q}_d$, $\dfrac{1}{e}$, con $e < d$.

Combinando estos dos procesos concluimos que todo racional no nulo está relacionado con un natural.

Los naturales que están relacionados con 0. □

Ya sabemos que hay dos coloraciones sanfermineras o ninguna.

Construimos recursivamente una coloración.

- Damos una coloración sanferminera a R_0.
- Ya hemos coloreado $\mathbb{Q}_1$. Si suponemos que hemos coloreado $\mathbb{Q}_d$ para todo $d < e$, coloreamos $\mathbb{Q}_e$: a cada $a \in \mathbb{Q}_e$ con $0 < a < 1$, le damos el color opuesto al que tiene $1/a$; después coloreamos R_a con la coloración sanferminera que tiene.

Veamos que esta coloración es sanferminera. Aplicamos la técnica del descenso infinito. Tomamos x, y que cumplen una de las tres igualdades y tienen el mismo color; y lo hacemos de modos que x esté un $\mathbb{Q}_d$ con d lo menor posible. Hay tres posibilidades.

- $xy = 1$. O bien ambos son positivos o bien ambos negativos. Si ambos son negativos, $-x$ está en el mismo R_a que x. Como la coloración es sanferminera en R_a, y la tenemos descrita, $-x$ tiene color opuesto a x. Igualmente, $-y$ tiene color opuesto a y. Los números $-x$, $-y$ tienen el mismo color, son positivos, cumplen $(-x)(-y) = 1$. Tomamos, pues $x, y > 0$. Uno de ellos cumple $0 < x < 1$. Debido a la construcción, x tiene diferente color que y. NO.
- $x + y = 0$. Entonces x, y están en un mismo R_a. La coloración es sanferminera en R_a. NO.
- $x + y = 1$.
  - Tienen signos opuestos. Entonces sstán en un mismo R_a. NO.
  - Tienen el mismo signo. Ha de ser $0 < x$, $y < 1$. Sean $x_1 = \dfrac{1}{x}$, $y_1 = \dfrac{1}{y}$. Debido la construcción, tenemos que tienen el mismo color, opuesto al anterior. Tomamos e tal que $x_1 \in \mathbb{Q}_e$. Sabemos que $e < d$. Tenemos que x_1, $y_1 > 1$, $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{y_1} = 1$, que equivale a $(x_1 - 1)(y_1 - 1) = 1$. Tomamos $x_2 = x_1 - 1$, $y_2 = y_1 - 1$. Notamos que x_2 está en el mismo R_a que x_1. Utilizamos la descripción de las coloraciones sanfermineras en R_a, y llegamos a que, puesto que x_1, $x_2 > 0$ ambos tienen el mismo color. Con el mismo argumento llegamos a que y_2 tiene el mismo color que y_1. Por tanto x_2, y_2 tienen el mismo color. Por otra parte, $x_2 y_2 = 1$, con $x_2 \in \mathbb{Q}_e$. Debido a que d es mínimo, x_2, y_2 tienen distinto color. NO.

$\square$

Problema seis

Sea (S_n) con $n \geq 0$ la sucesión definida por

1. $S_n = 1$ para $0 \leq n \leq 2011$.
2. $S_{n+2012} = S_{n+2011} + S_n$ para $n \geq 0$.

Prueba que, para todo entero no negativo a se cumple que $S_{2011a} - S_a$ es múltiplo de 2011.

Solución. Utilizaremos los tres siguientes resultados:

Proposición 1. $\binom{pb}{pc}$ *tiene el mismo resto que* $\binom{b}{c}$*, al dividir por* p*.*

Proposición 2. *Si* q *no es múltiplo de* p *se tiene que* $\binom{pb}{q}$ *es múltiplo de* p*.*

Proposición 3. *El número de formas distintas de colocar, secuencialmente,* M *objetos de un tipo y* N *objetos de otro es* $\binom{M+N}{M} = \binom{M+N}{N}$.

Para obtener los dos primeros resultados debemos notar que

Escolio. *Es posible dividir congruencias módulo un primo, siempre que el divisor no sea múltiplo de* p*.*

Remarcamos que

Escolio. 2001 *es primo.*

Trabajamos, en lugar de con 2001, con un primo p cualquiera.

Denotamos $\equiv$ a la congruencia módulo p.

Llamamos A_n al número de maneras de rellenar un rectángulo $n \times (p+1)$ (n filas y $p+1$ columnas) con piezas rectangulares de la forma $1 \times (p+1)$ (puestas horizontalmente) y piezas cuadradas de la forma $(p+1) \times (p+1)$.

Podemos colorear de distinto modo las piezas rectangulares (en rojo) y las cuadradas (en blanco). De este modo maneras distintas, tienen coloraciones distintas.

Se tiene que $A_n = 1$ siempre que $n \leq p$.

Además, $A_{n+p+1} = A_{n+p} + A_n$ siempre que $n \geq p+1$. Para llegar a esto, basta con separar las distintas maneras de rellenar el rectángulo en dos tipos, según el color de la última pieza colocada.

Por tanto, $A_n = S_n$.

Las distintas maneras de rellenar el rectángulo $n \times (p+1)$ vienen determinadas por dos factores:

- La cantidad de piezas blancas que ponemos, que llamamos j. Puesto que estas piezas ocupan $j \cdot (p+1)$ filas, se tiene que $j \cdot (p+1) \leq n$. Además cada una de las filas restantes está cupada por una pieza roja. Por tanto, colocamos $n - j \cdot (p+1)$ piezas rojas.

- Para cada j como arriba, las diferentes maneras de rellenar el rectángulo vienen determinadas por las diferentes maneras de distribuir las piezas. En total, tenemos que colocar $n - j \cdot (p+1) + j = n - j \cdot p$ piezas, j de un tipo, $n - j \cdot (p+1)$ de otro. El número de maneras distintas es, entonces $\binom{n-jp}{j}$.

Así obtenemos

$$A_n = \sum_{\substack{j\in\mathbb{N}_0 \\ j(p+1)\leq n}} \binom{n-jp}{j}.$$

En particular

$$A_{pa} = \sum_{\substack{j\in\mathbb{N}_0 \\ j(p+1)\leq pa}} \binom{pa-jp}{j}.$$

Utilizando la proposición de arriba para números j no múltiplos de p (excribimos para las otros números, $j = pk$).

$$A_{pa} \equiv \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}_0 \\ pk(p+1)\leq pa}} \binom{pa-p^2k}{pk} = \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}_0 \\ k(p+1)\leq a}} \binom{pa-kp^2}{pk}$$

Utilizando la proposición de arriba para j múltiplo de p,

$$A_{pa} \equiv \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}_0 \\ k(p+1)\leq a}} \binom{a-pk}{k} = A_a.$$

Es decir $A_{pa} - A_a$ es múltiplo de p.

□

Comentario. *Sobre divisibilidad números combinatorios podemos obtener estos dos resultados, algo más generales:*

Proposición 4. *Si $c \leq b$ y $0 \leq \delta \leq \epsilon < p$, $\binom{pb+\epsilon}{pc+\delta}$ tiene el mismo resto que $\binom{b}{c}\binom{\epsilon}{\delta}$, al dividir por p.*

Proposición 5. *Si $c < b$ y $0 \leq \epsilon < \delta < p$, $\binom{pb+\epsilon}{pc+\delta}$ es múltiplo de p.*