XLVIII Olimpiada Matemática Española

Fase Local en La Rioja

Primera Sesión

Tarde del viernes 11 de enero de 2013

Problema 1. Calcula la suma de los inversos de los dos mil trece primeros términos de la sucesión de término general

$$a_n = 1 - \frac{1}{4n^2}.$$

Problema 2. Obtén los dos valores de x más próximos a 2013°, tanto por defecto como por exceso, que cumplen la ecuación

$$2^{\operatorname{sen}^2 x} + 2^{\cos^2 x} = 2\sqrt{2}.$$

Problema 3. Por los puntos medios de dos de los lados de un triángulo trazamos las medianas y unimos los dos puntos que dividen en tres partes iguales el tercer lado con el vértice opuesto. Así, en el interior del triángulo, obtenemos dos triángulos unidos por un vértice (una pajarita). Calcula qué fracción de la superficie total del triángulo cubre la pajarita.

Notas

- No está permitido usar calculadora.
- El tiempo para resolver los problemas es de tres horas y media.
- Cada problema se calificará sobre 7 puntos.

XLVIII Olimpiada Matemática Española

Fase Local en La Rioja

Segunda Sesión

Mañana del sábado 12 de enero de 2013

Problema 4. Dado un número entero n, escrito en el sistema de numeración decimal, restamos del número formado por sus tres últimas cifras el número formado por las cifras restantes. Llamamos k al número obtenido. Demuestra que n es divisible por 7, 11 o 13 si y sólo si lo es k.

Problema 5. Prueba que las sumas de las primeras, segundas y terceras potencias de las raíces del polinomio

$$p(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$$

valen lo mismo.

Problema 6. En una sala de baile hay 15 chicos y 15 chicas dispuestos en dos filas paralelas, de manera que forman 15 parejas de baile. Sucede que las diferencias de altura entre el chico y la chica de cada pareja no superan los 10 cm. Demuestra que, si colocamos los mismos chicos y chicas en dos filas paralelas en orden decreciente de alturas, otra vez las diferencias de alturas entre los miembros de las nuevas parejas no superan los 10 cm.

Notas

- No está permitido usar calculadora.
- El tiempo para resolver los problemas es de tres horas y media.
- Cada problema se calificará sobre 7 puntos.