XLVII Olimpiada Matemática Española

Fase Local en La Rioja

Primera Sesión

Tarde del viernes 21 de enero de 2011

Problema 1. Consideramos un polinomio de segundo grado, que escribimos $p(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), cuyas raíces x_1, x_2 son distintas. Demuestra que para que $p(x_1^3) = p(x_2^3)$ es suficiente que $a^2 + 3ac - b^2 = 0$. ¿Es también necesaria esta condición?

Problema 2. Denotamos $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ y $\mathbb{N}^* = \{0\} \cup \mathbb{N}$. Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ con las siguientes propiedades:

- $f(n) \leq f(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (o sea, f es creciente, aunque no necesariamente estrictamente).
- $f(2) = 2$.
- $f(nm) = f(n) + f(m)$ para todo par n, $m \in \mathbb{N}$.

Problema 3. Sabemos que un cuadrado, que llamamos C, se cubre completamente con cuadrados de lado unidad, sin solapamientos y sin que los cuadrados salgan de C. Colocamos dentro de C tantos cuadrados de área 2 como sea posible, con lados paralelos a los ejes, también sin solapamientos. Al hacerlo, sabemos que cubrimos exactamente ocho novenas partes del área del cuadrado. Determina todos los posibles valores del lado del cuadrado C.

Notas:

- No está permitido usar calculadora.
- El tiempo para resolver los problemas es de tres horas y media.
- Cada problema se calificará sobre 7 puntos.

XLVII Olimpiada Matemática Española

Fase Local en La Rioja

Segunda Sesión

Mañana del sábado 22 de enero de 2011

Problema 4. Consideramos un alfabeto de n letras, con el que formamos palabras. Decimos que una palabra contiene un palíndromo si un trozo de esa palabra, de más de una letra, se lee igual del derecho que del revés. Por ejemplo, la palabra **OLIMPIADAS** contiene el palíndromo **ADA**. Determina, para cada entero k mayor que 2, cuántas palabras de longitud k se pueden formar, con un alfabeto de n letras, que no contengan ningún palíndromo de longitud impar.

Problema 5. Se ordenan los números naturales en forma de tabla triangular; o sea

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 2 & 3 & 4 & & \\ & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ & & \multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdot} & & \end{array}$$

Llamamos posición del número N al par formado por el primer número de su fila y el primer número de su columna. Por ejemplo, el número 15 está en la posición $(10, 9)$. Cuando un número N en la posición (n, m) verifica que $N = n + m$ diremos que N está *bien colocado*. Así, los números 12 y 14 están bien colocados, pero el 15 no lo está. ¿Está 2^{2011} bien colocado?

Problema 6. En un triángulo no equilátero, llamamos O al circuncentro, I al incentro y r al radio de la circunferencia inscrita. La mediatriz del segmento OI corta a la circunferencia circunscrita en un punto L. La recta que contiene al segmento LI corta a la circunferencia circunscrita, además de en L, en un punto M. Demuestra que $IM = 2r$.

Notas:

- No está permitido usar calculadora.
- El tiempo para resolver los problemas es de tres horas y media.
- Cada problema se calificará sobre 7 puntos.