

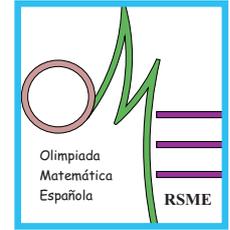


LVI Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Primera sesión

Viernes tarde, 17 de enero de 2020



1. Consideramos el polinomio

$$p(x) = (x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a).$$

Demostrar que $p(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ si, y solamente si, $a = b = c$.

2. Sea ℓ la recta tangente a un punto P de una circunferencia de radio $r = 1$. Por un punto Q de la circunferencia trazamos la recta perpendicular a ℓ , de manera que la corta en un punto R . Determinar el valor máximo del área del triángulo ΔPQR .

3. Hallar todas las ternas de números enteros (x, y, z) que verifican la ecuación:

$$2x^3 + y^3 = 4z^3.$$

**No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.**

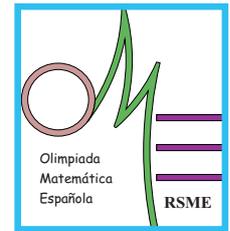


LVI Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Segunda sesión

Sábado mañana, 18 de enero de 2020



4. Ana y Bernardo juegan al siguiente juego. Se empieza con una bolsa que contiene $n \geq 1$ piedras. En turnos sucesivos, y empezando por Ana, cada jugador puede hacer los siguientes movimientos: si el número de piedras en la bolsa es par, el jugador puede coger una sola piedra o la mitad de las piedras. Si el número de piedras en la bolsa es impar, tiene que coger una sola piedra. El objetivo del juego es coger la última piedra. Determinar para qué valores de n Ana tiene una estrategia ganadora.
5. Determinar para qué valores de n existe un polígono convexo de n lados cuyos ángulos internos, expresados en grados, son todos enteros, están en progresión aritmética y no son todos iguales.
6. Sea X un punto del lado BC de un triángulo ABC . Sean B' y C' puntos en los lados AC y AB , respectivamente, tales que el segmento XB' es paralelo al lado AB y el segmento XC' paralelo al lado AC . Probar que el área del triángulo $\Delta XB'C'$ es máxima cuando X es el punto medio del lado BC .

**No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.**