

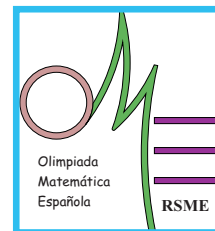


# LIV Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Primera sesión

Viernes tarde, 19 de enero de 2018



1. Determinar los números reales  $x > 1$  para los cuales existe un triángulo cuyos lados tienen longitudes

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1, \quad 2x^3 + x^2 + 2x + 1, \quad x^4 - 1$$

2. Sea  $n$  un número natural. Probar que si la última cifra de  $7^n$  es 3, la penúltima es 4.
3. Sea  $AD$  la mediana de un triángulo  $ABC$  tal que  $\angle ADB = 45^\circ$  y  $\angle ACB = 30^\circ$ . Determinar el valor de  $\angle BAD$ .

**No está permitido el uso de calculadoras.  
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.  
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.**

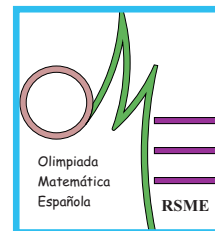


# LIV Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Segunda sesión

Sábado mañana, 20 de enero de 2018



4. Probar que:

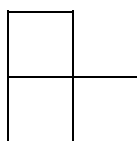
- La suma de las distancias desde un punto de la superficie de la esfera inscrita en un cubo de  $\mathbb{R}^3$  a todas las caras del mismo no depende del punto elegido.
- Misma cuestión anterior para la suma de los cuadrados de las distancias.

5. Sean  $a, b, c$  números naturales primos, distintos dos a dos. Demostrar que el número

$$(ab)^{c-1} + (bc)^{a-1} + (ca)^{b-1} - 1$$

es un múltiplo del producto  $abc$ .

6. Se han coloreado 46 cuadrados unitarios de una cuadrícula  $9 \times 9$ . ¿Hay, en la cuadrícula, alguna figura del tipo



(no necesariamente con la orientación que muestra el dibujo) con las tres casillas coloreadas?

**No está permitido el uso de calculadoras.  
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.  
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.**