

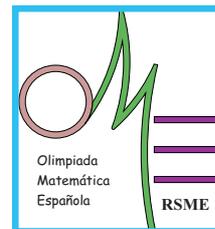


LIV Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Primera sesión

Viernes tarde, 19 de enero de 2018



1. Determinar los números reales $x > 1$ para los cuales existe un triángulo cuyos lados tienen longitudes

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1, \quad 2x^3 + x^2 + 2x + 1, \quad x^4 - 1$$

2. Sea n un número natural. Probar que si la última cifra de 7^n es 3, la penúltima es 4.
3. Sea AD la mediana de un triángulo ABC tal que $\angle ADB = 45^\circ$ y $\angle ACB = 30^\circ$. Determinar el valor de $\angle BAD$.

**No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.**

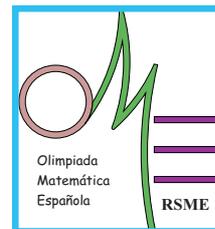


LIV Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Segunda sesión

Sábado mañana, 20 de enero de 2018



4. Probar que:

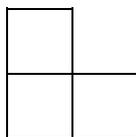
- La suma de las distancias desde un punto de la superficie de la esfera inscrita en un cubo de \mathbb{R}^3 a todas las caras del mismo no depende del punto elegido.
- Misma cuestión anterior para la suma de los cuadrados de las distancias.

5. Sean a, b, c números naturales primos, distintos dos a dos. Demostrar que el número

$$(ab)^{c-1} + (bc)^{a-1} + (ca)^{b-1} - 1$$

es un múltiplo del producto abc .

6. Se han coloreado 46 cuadrados unitarios de una cuadrícula 9×9 . ¿Hay, en la cuadrícula, alguna figura del tipo



(no necesariamente con la orientación que muestra el dibujo) con las tres casillas coloreadas?

**No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.**