



L Olimpiada Matemática Española
Fase nacional 2014, Requena
Viernes, 28 de marzo
PRIMERA SESIÓN

● **Problema 1**

¿Es posible disponer sobre una circunferencia los números $0, 1, 2, \dots, 9$ de tal manera que la suma de tres números sucesivos cualesquiera sea, como mucho a) 13, b) 14, c) 15?

● **Problema 2**

Dados los números racionales r, q y n , tales que $\frac{1}{r+qn} + \frac{1}{q+rn} = \frac{1}{r+q}$, probar que

$\sqrt{\frac{n-3}{n+1}}$ es un número racional.

● **Problema 3**

Sean B y C dos puntos fijos de una circunferencia de centro O , que no sean diametralmente opuestos. Sea A un punto variable sobre la circunferencia, distinto de B y C , y que no pertenece a la mediatriz de BC . Sean H , el ortocentro del triángulo ABC ; y M y N los puntos medios de los segmentos BC y AH , respectivamente. La recta AM corta de nuevo a la circunferencia en D , y, finalmente, NM y OD se cortan en un punto P .

Determinar el lugar geométrico del punto P cuando A recorre la circunferencia.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre siete puntos.
El tiempo de cada sesión es de tres horas y media.



L Olimpiada Matemática Española
Fase nacional 2014, Requena
Sábado, 29 de marzo
SEGUNDA SESIÓN

● **Problema 4**

Sea (x_n) la sucesión de enteros positivos definida por $x_1 = 2$ y $x_{n+1} = 2x_n^3 + x_n$ para todo $n \geq 2$. Determinar la mayor potencia de 5 que divide al número $x_{2014}^2 + 1$.

● **Problema 5**

El conjunto M está formado por números enteros de la forma $a^2 + 13b^2$, siendo a y b enteros, con $b \neq 0$.

- i) Demostrar que el producto de dos elementos cualesquiera de M es un elemento de M .
- ii) Determinar, razonadamente, si existen infinitos pares de enteros (x, y) tales que $x + y$ no pertenece a M , pero $x^{13} + y^{13}$ sí pertenece a M .

● **Problema 6**

Se tienen 60 puntos en el interior de un disco unidad (es decir, un círculo de radio 1, y su circunferencia frontera). Demostrar que existe un punto V de la frontera del disco, tal que la suma de las distancias de V a los 60 puntos es menor o igual que 80.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre siete puntos.
El tiempo de cada sesión es de tres horas y media.