







OLIMPIADA ESPAÑOLA DE FÍSICA 2014 PRUEBAS DEL DISTRITO UNIVERSITARIO DE LA RIOJA REAL SOCIEDAD ESPAÑOLA DE FÍSICA

21 de febrero 2014





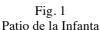
R.S.E.F.

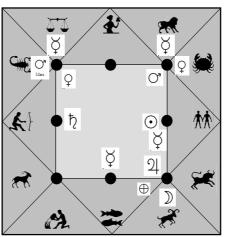
P1.- El Zodiaco, la Tierra, un Satélite y el Patio de la Infanta.

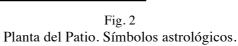
Los astros, sus movimientos y sus posiciones respecto a La Tierra han sido uno de los principales motivos de "curiosidad científica" en todas las culturas, desde los tiempos más remotos. Esta curiosidad propició el nacimiento de una Ciencia, la Astronomía, pero también ha dado lugar a otros enfoques esotéricos, arbitrarios e inciertos, nada científicos, rodeados siempre de un carácter adivinatorio y envueltos en un halo de misterio, que constituyen la astrología.

Sin embargo, a la astrología se han dedicado y se dedican ríos de tinta, y está fuera de dudas su influencia en la literatura y en el arte a lo largo de los siglos. A este respecto, en Zaragoza existe una excepcional obra del renacimiento aragonés que, entre su profusa decoración escultórica, presenta numerosos símbolos astrales y zodiacales. Se trata del "Patio de la Infanta", del siglo XVI (figuras 1 y 2).





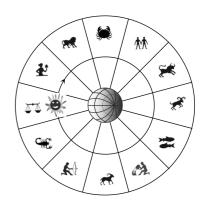




El Zodiaco es una zona o faja celeste por el centro de la cual pasa la eclíptica¹. Comprende las 12 constelaciones, "signos" o "casas" que recorre el Sol en su curso anual aparente. Estas constelaciones se consideran regularmente espaciadas cada 30°, y están representadas con su símbolo habitual en la figura 3. Sus nombres son Aries, Tauro, Géminis, Cáncer, Leo, Virgo, Libra, Escorpio, Sagitario, Capricornio, Acuario y Piscis.

La distancia de la Tierra a cualquier constelación del Zodiaco es enorme, en comparación con el tamaño de la Tierra. Por ejemplo, la distancia a Aldebarán, una de las estrellas de Tauro, es del orden de 65 años luz.

Un observador terrestre está situado en un punto A de la superficie de la



Columnas

Fig. 3

¹ Círculo formado por la intersección del plano de la órbita terrestre con la esfera celeste, y que aparentemente recorre el Sol, visto desde la Tierra, durante un año.





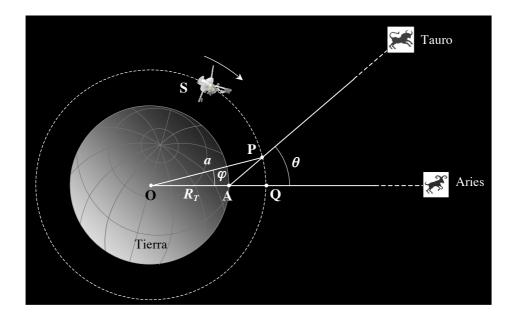


Fig. 4

Tierra. En su cénit se encuentra la constelación Aries, como se observa en la figura 4, que no está representada a escala.

Desde el punto A se observa un satélite artificial, S, que describe una órbita circular de radio OP = a, donde O es el centro de la Tierra. Tanto el punto A como la órbita del satélite se encuentran en el plano de la eclíptica.

a) Determina la expresión del periodo de revolución del satélite, T, en función del radio a de su órbita, del radio de la Tierra, R_T , y de la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra, g.

El ángulo θ , indicado en la figura 4, es el que forma la dirección de la visual desde A al satélite cuando está en P, alineado con la constelación Tauro, y la visual cuando el satélite está en Q, alineado con Aries.

b) Demuestra que el ángulo θ está relacionado con el radio de la Tierra, R_T , el radio de la órbita del satélite, a, y el ángulo φ que forma OP con OA, en la forma

$$tg \theta = \frac{a \sin \varphi}{a \cos \varphi - R_T}$$

- c) ¿Qué valor aproximado tiene el ángulo θ ?
- Calcula el radio a de la órbita del satélite en el caso de que $\varphi = 1.94^{\circ}$.
- e) ¿Cuánto tiempo transcurre desde que el observador en A ve pasar el satélite por P hasta que lo ve pasar por Q?

Datos: Radio de la Tierra: $R_T = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$

Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra: $g = 9.81 \,\mathrm{m/s^2}$.





R.S.E.F

P1 Solución

a) Dado que el satélite describe una órbita circular de radio a en torno a la Tierra, se verifica que

$$G\frac{M_T m}{a^2} = m\omega^2 a \tag{1}$$

Donde M_T es la masa de la Tierra, m la masa del satélite, G la constante de Gravitación universal y $\omega = 2\pi/T$, siendo T el periodo de revolución del satélite. Como la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra es $g = GM_T/R_T^2$, en la que R_T es el radio de la Tierra, la expresión (1) se puede escribir

$$g\frac{R_T^2}{a^2} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a \implies \boxed{T = \frac{2\pi}{R_T} \left(\frac{a^3}{g}\right)^{1/2}}$$
 (2)

b) De la figura 5, que es una ampliación de una parte de la figura 4, se deduce

$$AP \operatorname{sen} \theta = a \operatorname{sen} \varphi$$

$$AP \cos \theta = a \cos \varphi - R_T$$
(3)

Dividiendo miembro a miembro en (3), se obtiene la relación buscada

$$tg \theta = \frac{a \operatorname{sen} \varphi}{a \operatorname{cos} \varphi - R_T} \tag{4}$$

c) La distancia entre la Tierra y cualquiera de las constelaciones del zodiaco es muchísimo mayor que el radio de la Tierra (6,37×10³ km). Por ejemplo, la estrella Aldebarán, representativa de Tauro, está a 65 años luz, que equivale a 6,1×10¹⁴ km. En consecuencia, las direcciones de las visuales a Tauro desde A y desde el centro de la Tierra, pueden considerarse paralelas. Por otra parte, tal como indica el enunciado, las casas del zodiaco están regularmente espaciadas cada 30°. En definitiva, se tiene que

$$\theta = 30^{\circ}$$

d) De (4) se deduce que

$$a = R_T \frac{\operatorname{tg} \theta}{\operatorname{tg} \theta \cos \varphi - \operatorname{sen} \varphi}$$

Con $\theta = 30^{\circ}$, $\varphi = 1,94^{\circ}$ y $R_T = 6,37 \times 10^{6}$ m, resulta

$$a = 6,77 \times 10^6 \text{ m}$$

e) Como la velocidad angular orbital del satélite es constante, el tiempo τ que transcurrirá desde que el observador A ve pasar el satélite por P hasta que lo hace por Q, viene dado por

$$\frac{\varphi(\text{rad})}{\tau} = \frac{2\pi}{T} \implies \tau = \frac{\varphi(\text{rad})}{2\pi}T = \frac{\varphi(^{\circ})}{360}T$$

El valor numérico del periodo T se obtiene de (2)

$$T = 5.55 \times 10^3 \text{ s}$$

En total

$$\tau = 29.9 \, \text{s}$$





P2.- ¿Se puede medir la altura de una gruta con la fotografía de una gota?

Un montañero iba a hacer una fotografía desde el interior de una gruta hacia el exterior, y al enfocar el paisaje vio que en el borde superior de la entrada había una incipiente estalactita de la que estaba a punto de caer



una gota de agua. Cuando observó que la gota se desprendía, disparó su cámara fotográfica, con un tiempo de exposición $\Delta t = (1/45)$ s (tiempo durante el que llega luz al fotosensor). La fotografía obtenida se muestra en la figura 1. Aproximadamente en su centro se observa el trazo de la gota durante la exposición, reforzado para que se visualice mejor. A la derecha de la foto se ha añadido una regla, graduada en unidades arbitrarias, para poder medir las distancias que consideres oportunas.

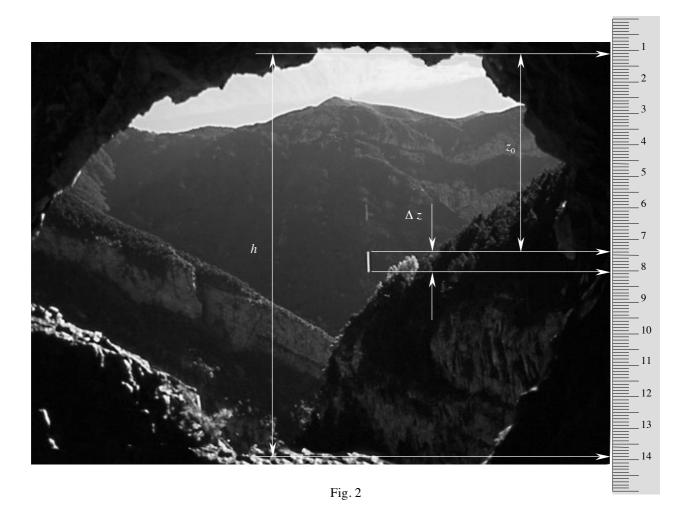
Despreciando la resistencia del aire y el empuje hidrostático, y sabiendo que la gravedad es $g = 9.8 \,\mathrm{m/s^2}$, haz una estimación de:

- a) El tiempo de reacción del montañero, es decir el tiempo que transcurre desde que se desprende la gota hasta que dispara la cámara.
- b) La distancia recorrida por la gota durante el tiempo anterior.
- c) La altura de la entrada de la gruta.





P2 Solución



En primer lugar, haciendo uso de la regla de la figura 1, pueden determinarse las distancias características del proceso de caída de la gota: la longitud de la traza de la gota durante la exposición, Δz , la distancia recorrida por la gota hasta el instante del disparo de la cámara, z_0 , y la altura de la gruta, h. Estas distancias se indican en la figura 2 y sus medidas, expresadas en unidades arbitrarias (u.a.), van a ser los datos del problema.

Los resultados de las medidas son:

$$\Delta z = 0.6 \text{ u.a.}$$
 $z_0 = 6.3 \text{ u.a.}$ $h = 12.8 \text{ u.a.}$

Expresadas en metros, las anteriores longitudes son, respectivamente,

$$\Delta Z = f \Delta z$$
 $Z_0 = f z_0$ $H = f h$

Donde f es el factor de conversión de las unidades arbitrarias a metros, en principio desconocido.

a) Despreciando la resistencia del aire, la gota cae desde el reposo con aceleración g. Si t_0 es el tiempo que transcurre desde que se desprende la gota hasta que se dispara la cámara (tiempo de reacción del montañero), la velocidad de la gota en el instante del disparo es

$$v_0 = gt_0 \tag{1}$$

El espacio recorrido por la gota en este tiempo es





R.S.E.F

$$Z_0 = \frac{1}{2}gt_0^2 \tag{2}$$

Por otra parte, como $\Delta Z \ll Z_0$ y el tiempo de exposición es muy breve, podemos considerar que la gota se mueve con velocidad aproximadamente constante v_0 durante la exposición, de forma que

$$\Delta Z = v_0 \Delta t \tag{3}$$

Las relaciones (2) y (3) pueden expresarse en función de los datos y del factor de conversión

$$fz_0 = \frac{1}{2}gt_0^2 \tag{4}$$

$$f \Delta z = v_0 \Delta t \tag{5}$$

Dividiendo miembro a miembro (4) y (5) y teniendo en cuenta (1), resulta

$$t_0 = \frac{2z_0}{\Delta z} \Delta t$$

Esta expresión es independiente de f. Con los datos numéricos anteriores y $\Delta t = (1/45)$ s se obtiene

$$t_0 = 0.47 \,\mathrm{s}$$

b) Sustituyendo directamente t_0 en (2) se calcula la distancia Z_0

$$Z_0 = 1.1 \,\mathrm{m}$$

c) Para calcular la altura de la entrada de la gruta, H, se necesita el factor de conversión f. Su valor es

$$f = \frac{Z_0}{z_0}$$
 \Rightarrow $f = 0.17 \text{ m/u.a.}$

Por lo que la altura es

$$H = f h \implies H = 2,2 \text{ m}$$

Nota: las medidas sobre la fotografía tienen una precisión muy baja. En particular, la medida de h es muy imprecisa porque no está muy claro dónde está el suelo de la gruta. También tiene una precisión relativa muy baja la medida de Δz , por ser una distancia sólo un poco mayor que la resolución de la regla. Por todo ello, los resultados numéricos son simples estimaciones de los valores reales.





P3.- Un juguete sorprendente: el generador de Van de Graaff.

Cuando los físicos quieren visualizar en las aulas, o en los museos de las ciencias, los efectos de los campos y las fuerzas eléctricas, utilizan a veces un dispositivo llamada generador de Van de Graaff. En esencia, es una esfera metálica sobre la que, por procedimientos mecánicos, se va depositando una carga Q que produce un intenso campo eléctrico en el exterior.

Uno de los experimentos típicos consiste en cargar paulatinamente la esfera hasta que salta una espectacular chispa. Lo que ha ocurrido es que el campo eléctrico exterior es tan intenso que llega a ionizar las moléculas del aire, de forma que se produce una brusca corriente eléctrica con emisión de luz visible por colisiones de las cargas libres con otras moléculas del aire.

El campo de ruptura dieléctrica del aire seco, es decir el máximo campo eléctrico que soporta antes de ionizarse, es $E_{\text{max}} = 3 \text{ MV/m}$.

Determina la carga máxima, Q_{max} , que se puede suministrar a la esfera de un Van de Graaff, de radio R = 10 cm, para que no se produzca la ruptura dieléctrica del aire en su entorno. ¿Qué potencial alcanza la esfera en esta situación?

> Ayuda: un conductor en equilibrio electrostático constituye un volumen equipotencial, y la carga eléctrica se distribuye exclusivamente sobre su superficie. El campo y el potencial electrostáticos en su exterior son los mismos que los creados por una partícula con la misma carga neta que la esfera y situada en su centro.

Otro de los experimentos que se puede realizar con un Van de Graaff consiste en colocar encima de la esfera varios moldes de papel de aluminio, que se cargan conjuntamente con la esfera, y ver cómo el campo eléctrico los lanza hacia arriba de uno en uno (Figuras 1a y 1b).

El estudio riguroso del movimiento de los moldes es complejo. Para poder hacer cálculos aproximados, vamos a hacer algunas suposiciones:

- Cuando el molde se separa de la esfera se lleva una parte de la carga del sistema, pero el generador aporta casi instantáneamente esa misma carga a la esfera, de forma que se mantiene constante su potencial.







Fig. 1b

- El molde es mucho más pequeño que la esfera, y puede considerarse puntual.
- La distribución de carga sobre la esfera mantiene siempre una simetría esférica. No se considera por tanto la influencia de la carga del molde, que cuando está próximo a la esfera perturba ligeramente esta simetría.
- No se considera el rozamiento con el aire.
- Cuando el molde salta, sigue una trayectoria recta en dirección vertical.





R.S.E.F

Suponiendo que la esfera se carga a un potencial $V_0 = 225 \text{ kV}$, y que sobre ella se pone un único molde de masa m = 3.0 g y con carga $q = 7.5 \times 10^{-2} \,\mu\text{C}$, determina y calcula:

- b) La carga que adquiere la esfera, Q.
- c) La aceleración del molde, a_0 , cuando se separa de la superficie de la esfera (punto A de la figura 2).
- d) La máxima distancia al centro de la esfera que llega a alcanzar, r_B , antes de caer.
- e) La distancia r_C al punto donde la velocidad del molde es máxima.
- f) El valor de esta velocidad máxima, v_{max} .

Supón ahora que se colocan varios moldes, uno encima de otro, sin rozamiento entre ellos.

g) Explica por qué los moldes saltan de uno en uno, y no todos a la vez.

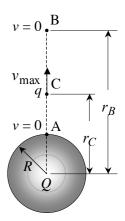


Fig. 2

Datos: Constante de Coulomb, $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9.0 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$.

Aceleración de la gravedad, $g = 9.8 \text{m/s}^2$.





R.S.E.F

P3 Solución

a) Como se indica en el enunciado, la carga de la esfera conductora se distribuye en la superficie, pero el campo eléctrico en el exterior de la esfera es el mismo que si toda la carga *Q* estuviese concentrada en el centro de la esfera, es decir con dirección radial y módulo

$$E = k \frac{Q}{r^2}$$

La mayor intensidad de este campo se tiene junto a la superficie del conductor, es decir cuando r = R. En el límite de que este campo sea igual al de ruptura dieléctrica

$$E_{\max} = k \frac{Q_{\max}}{R^2}$$
 \Rightarrow $E_{\max} = k \frac{Q_{\max}}{R^2}$ \Rightarrow $E_{\max} = k \frac{Q_{\max}}{R^2}$

El potencial de la esfera es, en este caso

$$V_{\text{max}} = k \frac{Q_{\text{max}}}{R} = E_{\text{max}} R$$
 \Rightarrow $E_{\text{max}} = k \frac{Q_{\text{max}}}{R^2}$

b) La carga de la esfera es

$$V = k \frac{Q}{R}$$
 \Rightarrow $V = k \frac{Q}{R}$ \Rightarrow $Q = 2.5 \,\mu\text{C}$

c) Dos cargas de igual signo se repelen. Sobre el molde situado en la parte superior de la esfera actúa una fuerza resultante hacia arriba $F = F_e - F_g$, siendo F_e la fuerza eléctrica de repulsión y F_g la fuerza gravitatoria, es decir, el peso del molde. Para calcular la fuerza de interacción entre la esfera y un molde, supuesto puntual, podemos utilizar la ley de Coulomb, como si fuesen dos partículas cargadas.

$$F = k \frac{Qq}{R^2} - mg = ma \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = k \frac{Qq}{mR^2} - g} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = 46 \text{ m/s}^2}$$

d) En una primera fase del recorrido el molde parte del reposo y se acelera hacia arriba, ya que $F_e > F_g$. En un punto determinado, C, las fuerzas se igualan y a partir de entonces $F_e < F_g$, por lo que el molde reduce su velocidad hasta que, en el punto más alto, la velocidad vuelve a anularse.

Las fuerzas F_e y F_g son conservativas, por lo que la energía mecánica del molde se conserva. Tanto en el punto inicial, A, como en el más alto, B, la energía cinética es nula, luego

$$k\frac{Qq}{R} + mgR = k\frac{Qq}{r_R} + mgr_B$$

Operando, se obtiene la siguiente ecuación de segundo grado en r_R

$$r_B^2 - \left(k\frac{Qq}{mgR} + R\right)r_B + k\frac{Qq}{mg} = 0$$

Sustituyendo los datos (en el SI), se obtiene

$$r_B^2 - 0.674r_B + 0.0574 = 0$$





R.S.E.F.

De las dos soluciones de la ecuación, una de ellas es la trivial, $r_B = 0.10 \,\mathrm{m} = R$, que corresponde a la posición inicial. La otra, correspondiente al punto más alto B, resulta

$$r_B = 0.57 \,\mathrm{m}$$

e) La velocidad ascendente del molde aumenta hasta el punto C, en el que se igualan en módulo las fuerzas gravitatoria y electrostática. En este punto la aceleración del molde es nula y la velocidad es máxima, $v_{\rm max}$. Por tanto, en C se cumple

$$k \frac{Qq}{r_C^2} = mg$$
 \Rightarrow $r_C = \sqrt{k \frac{Qq}{mg}}$ \Rightarrow $r_C = 0.24 \text{ m}$

f) La conservación de la energía mecánica entre los puntos A y C permite escribir

$$k\frac{Qq}{R} + mgR = k\frac{Qq}{r_C} + mgr_C + \frac{1}{2}mv_{\text{max}}^2$$
 \Rightarrow

$$v_{\text{max}} = \sqrt{2 \left[k \frac{Qq}{m} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_C} \right) - g(r_C - R) \right]} \Rightarrow v_{\text{max}} = 2.0 \text{ m/s}$$

g) Podría pensarse que, cuando hay varios moldes superpuestos, se cargan todos a la vez y el conjunto es repelido en bloque por la esfera. Esto no es correcto porque, como se indica en la "ayuda" del enunciado, la carga de un cuerpo conductor en equilibrio se distribuye en su superficie. En nuestro caso el cuerpo conductor total es la esfera más los moldes apilados en su vértice superior, de forma que únicamente el molde más exterior forma parte de la superficie del conjunto. Por tanto, el único que se carga inicialmente es el que está en el exterior, es decir el más alto. Cuando este molde salta y se aleja, el que era segundo molde pasa a formar parte de la superficie del conductor, se carga y es repelido por la esfera, y así sucesivamente.





R.S.E.F

PROBLEMA EXPERIMENTAL.

Caída de una bolita en un fluido

En la figura se muestra una fotografía, con exposiciones múltiples, de la caída de una pequeña esfera en el seno de un líquido viscoso. La esfera, de radio R = 1,00 mm, ha sido abandonada sin velocidad inicial en t = 0 (instante de la primera foto), y las sucesivas exposiciones han sido tomadas a intervalos regulares y exactos de 0,02 s. Las posiciones en cada instante pueden determinarse mediante la escala que también se muestra en la figura.

- a) Mide en la escala la posición z del centro de la bolita en el instante t de cada exposición.
 Presenta los datos en una tabla.
 Sugerencia: teniendo en cuenta el tamaño de la esfera, interpola visualmente en la escala para apreciar décimas de milímetro.
- b) Calcula la velocidad media de la bolita entre cada dos exposiciones consecutivas. Tabula los resultados, asignando la velocidad calculada al tiempo medio entre las dos exposiciones. Habrás obtenido que la velocidad es prácticamente constante en la zona final del recorrido. ¿Cuál es esta velocidad límite, v_L?

Este comportamiento experimental es congruente con un modelo de fuerza constante hacia abajo (peso de la bolita menos empuje de Arquímedes) y fuerza de fricción proporcional a la velocidad de la esfera en el seno del líquido, en sentido opuesto. Puede demostrarse que, con este modelo, la velocidad ν de la esfera tiende exponencialmente a ν_I :

$$v = v_L \left(1 - e^{-\gamma t} \right) \tag{1}$$

donde γ es una constante que depende de la masa de la esfera, m, de su radio, R, y del llamado *coeficiente de viscosidad* del fluido, η , en la forma

$$\gamma = \frac{6\pi R}{m} \eta \tag{2}$$

Reordenando la ecuación (1) y tomando logaritmos se obtiene

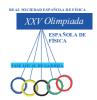
$$\ln\left(1 - \frac{v}{v_L}\right) = -\gamma t \tag{3}$$

Es decir, se espera una dependencia lineal entre la variable $y = \ln(1 - v/v_L)$ y el tiempo t.

- c) Representa gráficamente en el papel milimetrado los seis primeros² puntos y(t). Ajusta una línea recta a estos puntos y deduce el valor de γ en nuestro experimento.
- d) Sabiendo que se ha empleado una esfera con m = 48 mg, obtén la viscosidad del líquido, η , en unidades del SI.
- e) Supón que la principal fuente de error en este último resultado es el valor de la masa de la esfera, que se ha medido con una balanza digital que aprecia milésimas de gramo. Calcula la incertidumbre de η .

Problema experimental. Solución

² En los últimos puntos la velocidad ya es prácticamente constante, de forma que cualquier pequeño error experimental puede conducir a resultados muy desviados, incluso absurdos, al calcular el valor de y.





R.S.E.F

a) No es fácil determinar con precisión la posición del centro de la esfera en la regla de la figura, puesto que la esfera tapa un trozo de escala. Es más fácil y preciso observar la posición de su extremo superior (o inferior) y sumar (o restar) el radio R = 1,0 mm de la esfera. Con este procedimiento, y teniendo en cuenta que 1 mm en la escala ocupa realmente 2 mm en el papel, es razonable pensar que se puede determinar la posición z del centro de la esfera con una incertidumbre del orden de $\Delta z = 0,1$ mm. Las medidas se presentan en la tabla 1.

Tabla 1

<i>t</i> (s)	0,00	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20	0,22	0,24	0,26	0,28
z (cm)	0,00	0,15	0,54	1,06	1,68	2,35	3,05	3,78	4,52	5,26	6,02	6,77	7,53	8,29	9,05

b) La velocidad media entre dos exposiciones se obtiene restando las posiciones correspondientes y dividiendo por el intervalo de tiempo. Los resultados se recogen en la tabla 2, junto con los valores de la variable y que necesitaremos en el siguiente apartado.

Tabla 2

<i>t</i> (s)	0,01	0,03	0,05	0,07	0,09	0,11	0,13	0,15	0,17	0,19	0,21	0,23	0,25	0,27
v (cm/s)	7,5	19,5	26,0	31,0	33,5	35,0	36,5	37,0	37,0	38,0	37,5	38,0	38,0	38,0
у	-0,22	-0,72	-1,16	-1,70	-2,15	-2,57								

Como se indica en el enunciado, la velocidad en prácticamente constante en la parte final de la caída de la bolita. Promediando los cinco últimos valores se obtiene una velocidad límite:

$$v_L = 37.9 \text{ cm/s}$$

Aunque no se pide en el enunciado, la incertidumbre de esta velocidad se puede estimar como el error típico de la media, que resulta ser $\Delta v_L = 0.1 \text{ cm/s}$.

c) Los valores de la variable y en los seis primeros puntos experimentales se encuentran en la tabla 2. A continuación se presenta la gráfica pedida de los puntos y(t), junto con la línea recta que más se les aproxima.

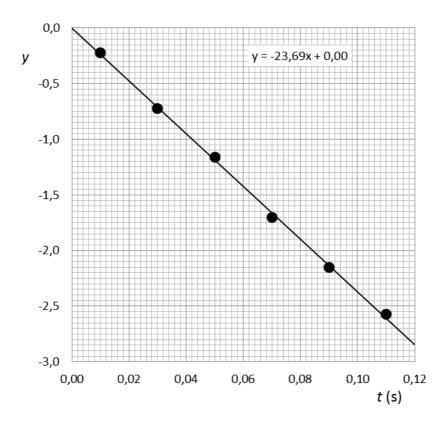
La recta que mejor se ajusta a los puntos experimentales pasa por el origen, como estaba previsto en la ecuación (3) del enunciado. La pendiente de esta recta puede obtenerse a partir de las coordenadas de un punto cualquiera, preferentemente de un punto alejado del origen, para mejorar la precisión relativa del resultado. Tomando, por ejemplo, el punto inferior derecho de la recta, (t, y) = (0.120 s, -2.84), la pendiente de la recta resulta

$$p = \frac{y}{t} = -23,67 \text{ s}^{-1}$$





Un ajuste estadístico empleando el método de *mínimos cuadrados* conduce al resultado que se muestra en la gráfica, con un valor muy similar para la pendiente.



Según (3), la pendiente de la recta y(t) es $-\gamma$, de forma que el coeficiente de amortiguamiento buscado es

$$\gamma = 23,67 \, \text{s}^{-1}$$

d) Despejando en (2), el coeficiente de viscosidad es

$$\eta = \frac{m\,\gamma}{6\,\pi\,R} \tag{4}$$

Con el valor obtenido para γ y los datos del enunciado resulta

$$\eta = 0.06028 \,\mathrm{kgm^{-1}\,s^{-1}}$$

La viscosidad suele expresarse, en el SI, en la unidad equivalente Pa□s.

e) La balanza digital con la que se ha medido la masa de la bolita, m = 48 mg, tiene una resolución de 1 mg, por lo que la incertidumbre de la medida es $\Delta m = 0.5 \text{ mg}$. Es decir, se espera que el valor exacto de la masa esté comprendido entre los valores extremos $m_{\min} = 47.5 \text{ mg}$ y $m_{\max} = 48.5 \text{ mg}$.





Sustituyendo estos valores extremos en (4) se obtienen los correspondientes valores máximo y mínimo de la viscosidad, y la incertidumbre buscada de η .

$$\eta_{\min} = 0.05965 \text{ kgm}^{-1} \text{ s}^{-1}
\eta_{\max} = 0.06090 \text{ kgm}^{-1} \text{ s}^{-1}$$

$$\rightarrow \Delta \eta = \frac{1}{2} (\eta_{\max} - \eta_{\min}) = 6.3 \times 10^{-4} \text{ kgm}^{-1} \text{ s}^{-1}$$

Con lo que el resultado del experimento, expresado con el número adecuado de cifras significativas, sería

$$\eta = (6.03 \pm 0.06) \times 10^{-2} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$$

Nota 1. Otra forma, matemáticamente más elegante, de obtener la incertidumbre de η consiste en tomar incrementos en (4)

$$\Delta \eta = \frac{\gamma}{6\pi R} \Delta m \tag{5}$$

Operando, vuelve a obtenerse el mismo valor numérico de $\Delta \eta$ calculado previamente.

Teniendo en cuenta (4), la expresión (5) puede también escribirse en la forma

$$\frac{\Delta \eta}{\eta} = \frac{\Delta m}{m}$$

Esta igualdad indica que las incertidumbres relativas de m y de η son iguales. Esta idea es bien conocida en las técnicas básicas de *propagación de errores*: cuando la relación entre las variables es directa (o inversa) las incertidumbres relativas son iguales. En nuestro caso, la relación entre η y m es directa y la incertidumbre relativa de m es $\Delta m/m$ =0,01 (es decir, el 1%), y por tanto $\Delta \eta$ =0,01 η =6×10⁻⁴ kgm⁻¹ s⁻¹.

Nota 2. Tal y como indica el enunciado, se ha considerado que la principal fuente de error en este experimento es la incertidumbre de la masa. Esta idea no es muy realista.

Ya se ha indicado en la solución del apartado b) que $v_L = (37.9 \pm 0.1)$ cm/s. Si se calculan las variables $y_1 = \ln(1 - v/v_{L,min})$ e $y_2 = \ln(1 - v/v_{L,max})$ y se representan en función del tiempo, se obtienen dos rectas con pendientes algo diferentes. Se deduce una incertidumbre para la pendiente $\Delta p = \Delta \gamma = 0.3$ s⁻¹. Por tanto, la incertidumbre relativa de γ es del 1.3%.

Por otra parte, el radio de la esfera se da en la forma R=1,00 mm, indicando que se ha medido con un aparato que aprecia la centésima de mm (por ejemplo, con un palmer), de forma que su incertidumbre es del orden de $\Delta R=0,005$ mm (puede depender de las circunstancias y de la repetitividad de la medida). Es decir, la incertidumbre relativa es del orden del 0,5%.

Uniendo las tres fuentes de error, que son independientes, la incertidumbre porcentual total de la viscosidad sería

$$\Delta \eta_{rel} = \sqrt{1^2 + 1.3^2 + 0.5^2} = 1.7\%$$





El resultado, con una estimación más realista de la incertidumbre, quedaría

$$\eta = (6.03 \pm 0.10) \times 10^{-2} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$$