P1.- Zancos saltadores

El inspector Gadget, personaje de una serie de cómic, utiliza unos muelles pegados a sus zapatos para realizar saltos espectaculares. Algunos deportistas atrevidos intentan emularlo, utilizando unos zancos desarrollados por la industria aeroespacial que les permiten dar saltos de casi 2 m o hacer "footing" a más de 40 km/h (figura 1).


Fig. 1

El estudio detallado de la mecánica de estos saltos es complicado. Para simplificarlo, vamos a adoptar un modelo sencillo constituido por un bloque de masa m sujeto a la parte superior de un muelle ideal sin masa, de longitud natural L_0 y constante elástica k.

Si dejamos caer el sistema, partiendo m de una altura inicial y_{ini} (figura 2a), caerá verticalmente, chocará con el suelo y rebotará hacia arriba. Durante el descenso, m pasa sucesivamente por tres posiciones singulares:

- El extremo inferior del muelle alcanza el suelo (figura 2b).
- El bloque pasa por una altura, y_{eq}, en la que la fuerza neta que actúa sobre él es nula (figura 2c). Ésta sería la altura del bloque en equilibrio si el sistema se apoyase suavemente sobre el suelo.
- El bloque se detiene momentáneamente a una altura mínima, y_{min}, antes de empezar a subir (figura 2d).

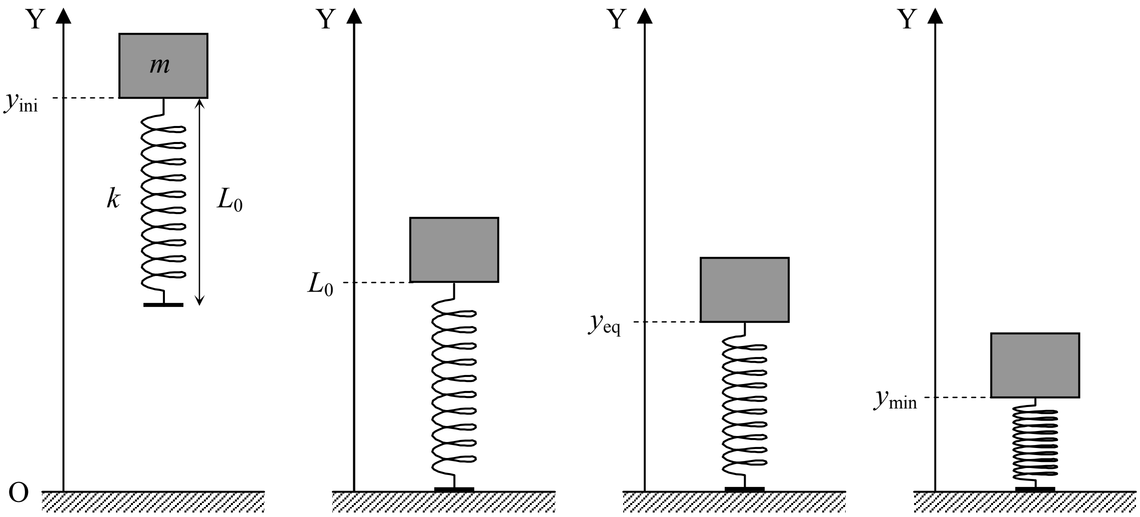

Fig. 2a Fig. 2b Fig. 2c Fig. 2d

Supón que se conocen L_0, y_{ini} e y_{min}, además de la aceleración de la gravedad, g. Contesta las siguientes preguntas, expresando tus resultados en función de los datos anteriores:

a) Determina la relación k/m entre la constante del muelle y la masa del bloque.

b) Determina la altura de equilibrio, y_{eq}.

c) Describe la aceleración de m en los siguientes intervalos:

- Desde $y = y_{ini}$ hasta $y = L_0$.
- Desde $y = L_0$ hasta $y = y_{min}$.

d) En la caída, ¿a qué altura y_1 es máxima la aceleración del bloque? ¿Cuál es su valor, a_{max}?

Para las dos siguientes preguntas, toma como datos numéricos:

$$L_0 = 80 \text{ cm} ; \quad y_{ini} = 2{,}0 \text{ m} ; \quad y_{min} = 20 \text{ cm} ; \quad g = 9{,}8 \text{ m/s}^2.$$

e) Calcula los valores de k/m, y_{eq} y a_{max}.

f) Haz una representación gráfica de a/g en función de y, para $y_{min} \le y \le y_{ini}$.

P2.- La misión Planck Surveyor

Planck Surveyor es la tercera misión del programa científico Horizon 2000 de la Agencia Espacial Europea. Dicho programa tiene por objeto detectar las anisotropías en el fondo cósmico de microondas en todo el cielo, con una resolución y sensibilidad sin precedentes. El satélite Planck será una fuente valiosísima de datos, con los que se intentarán comprobar las teorías actuales sobre el universo primitivo y los orígenes de las estructuras cósmicas. Este satélite fue lanzado desde la Guayana Francesa el 14 de mayo de 2009, impulsado por un cohete Ariane 5, y aún no ha llegado a su lejana órbita de destino.

El satélite describirá una órbita prácticamente circular en torno al Sol, con la particularidad de que, en todo momento, dicho satélite, la Tierra y el Sol estarán alineados, lo que implica que la velocidad angular de rotación del satélite en torno al Sol, ω, debe ser igual a la de la Tierra. Esta última característica (misma ω que la Tierra) es precisamente la que define los llamados puntos de Lagrange del sistema Sol - Tierra. Puede demostrarse que existen cinco de estos puntos (llamados L1 a L5). En particular, el satélite Planck se situará en el punto L2, que está alineado con el Sol y la Tierra, como se muestra en la figura 1. A este punto no llega nunca radiación directa del Sol, por lo que el satélite está permanentemente en sombra.

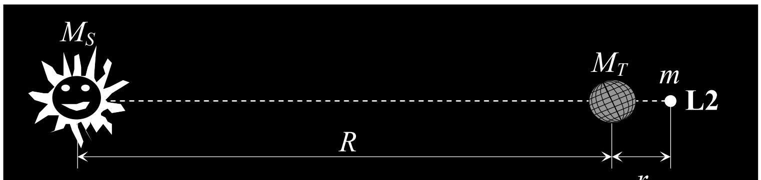

Fig. 1

a) Supuesto que la órbita de la Tierra en torno al Sol es circular, determina la velocidad angular de rotación ω en función de la constante de gravitación, *G*, la masa del Sol, M_S, y el radio de la órbita, *R*.

b) El satélite Planck, que está sometido a las atracciones gravitatorias del Sol y de la Tierra[1], debe describir una órbita con la misma ω que la Tierra, pero con un radio mayor, $R + r$, donde r es la distancia de la Tierra al punto L2. Teniendo esto en cuenta, obtén la ecuación que deben cumplir R, r, M_S y M_T (masa de la Tierra). Expresa esta ecuación en función de los cocientes M_T / M_S y r / R.

c) En la práctica, $r << R$ y $M_T << M_S$, lo que permite hacer aproximaciones en la ecuación del apartado anterior. Comprueba que puede reducirse a

$$r \approx R\left(\frac{M_T}{3M_S}\right)^{1/3}$$

Nota: Para realizar aproximaciones, puede resultarte útil saber que

$$|\varepsilon| << 1 \quad \rightarrow \quad (1+\varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon$$

d) Calcula el valor de la distancia r empleando los siguientes datos:

Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra: $g = 9{,}8$ m/s^2

Radio de la Tierra: $R_T = 6{,}4 \cdot 10^6$ m

Periodo de revolución de la Tierra en torno al Sol: $T = 1$ año

Ayuda para realizar este apartado: deducir antes $\dfrac{M_T}{M_S} = \dfrac{g\, R_T^2}{\omega^2 R^3}$

e) Como se dice en la introducción, existen cinco puntos de Lagrange. Otro de ellos, el L3, está a una distancia del Sol prácticamente igual al radio *R* de la órbita de la Tierra. ¿Dónde crees que puede estar este punto? La distancia entre L3 y el Sol, ¿será algo mayor o algo menor que *R*? Razona tus respuestas.

[1] Considera despreciables las interacciones gravitatorias con la Luna y con otros planetas del sistema solar.

P3.- Líneas de campo electrostático[2]

Un campo electrostático puede representarse gráficamente mediante sus *líneas de fuerza* (o *de campo*). El número de líneas que "nacen" o "mueren" en una carga es proporcional a la magnitud de dicha carga (la expresión matemática de esta idea constituye el *teorema de Gauss*). El campo eléctrico en cada punto es tangente a la línea de fuerza que pasa por dicho punto, y su intensidad es proporcional a la densidad de líneas (número de líneas por unidad de superficie) que hay en su entorno.

En la figura 1 se muestran las líneas de fuerza que describen el campo electrostático generado por dos cargas puntuales, q_1 y q_2, separadas una distancia d.

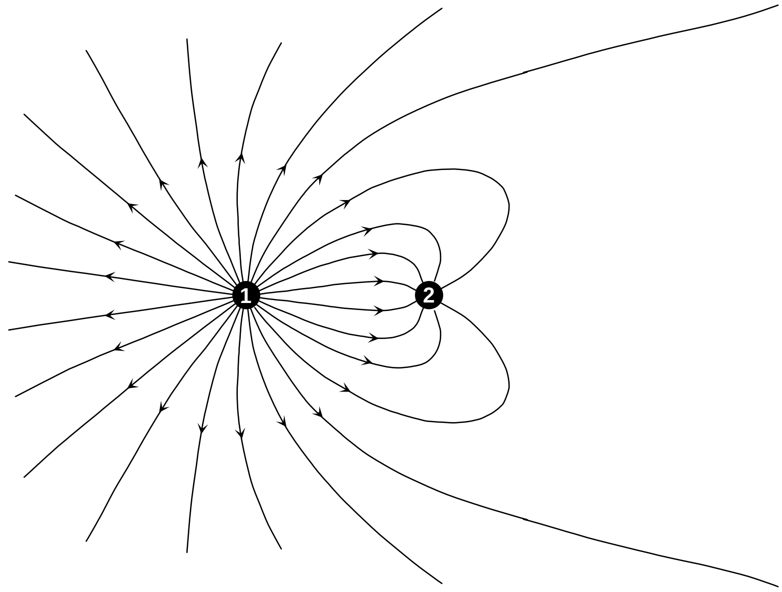

Fig. 1

a) Justifica de qué signo es cada una de las cargas.

b) ¿Cuál es su magnitud relativa, q_1 / q_2?

c) Razona, con la mayor precisión posible, en qué punto o puntos del plano de la figura 1 el campo electrostático $\vec{E}$ creado por ambas cargas es nulo.

d) Determina en qué punto o puntos del plano de dicha figura es nulo el potencial electrostático creado por las dos cargas .

Considera ahora la distribución de cargas puntuales representada en la figura 2, con $Q_1 = 6\ \mu\text{C}$, $Q_2 = -2\ \mu\text{C}$ y $d = 4$ cm .

f) Calcula el potencial electrostático, V, y el campo eléctrico, $\vec{E}$, en el punto A de la figura, situado a 3 cm de Q_1 y a 1 cm de Q_2.

g) Dibuja las líneas de fuerza para esta distribución de cargas.

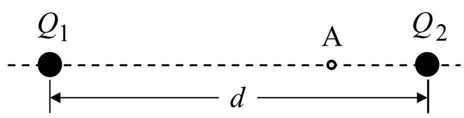

Fig. 2

Dato: $K = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9\ \text{N m}^2/\text{C}^2$

[2] Este problema está inspirado en uno de los propuestos en la II OIbF de Oaxtepec (México) en 1997.

P-4 Problema experimental. *Determinación de la viscosidad de un líquido.*

Cuando un cuerpo sólido se mueve en el seno de un fluido (gas o líquido), experimenta una fuerza de fricción, llamada habitualmente *fuerza de arrastre*, que frena su movimiento. Si la velocidad del cuerpo es suficientemente pequeña, se encuentra que la fuerza de arrastre es directamente proporcional a dicha velocidad. La constante de proporcionalidad depende de la forma del cuerpo y de la viscosidad del fluido. En el caso particular de un cuerpo esférico, se demuestra que la fuerza de arrastre F_a es (Ley de Stokes)

$$F_a = 6\pi\eta R v \qquad (1)$$

donde *v* es la velocidad, *R* es el radio de la esfera y η es el llamado *coeficiente de viscosidad* del fluido.

En este problema experimental vamos a trabajar con uno de los métodos más comunes de determinar el coeficiente η de un líquido: medida de la velocidad límite de caída de esferas en una columna de ese líquido.

Cuando una esfera cae moviéndose en el seno de un líquido, sobre ella actúan dos fuerzas: su peso aparente, que tiende a acelerar el movimiento hacia abajo, y la fuerza de arrastre (1) que tiende a frenar este movimiento, es decir dirigida hacia arriba. Como la primera es constante y la segunda crece con la velocidad, la aceleración disminuye conforme la esfera cae y gana velocidad. Al cabo de un tiempo y un recorrido suficientemente grandes, las dos fuerzas llegan a igualarse y la aceleración se anula, de forma que la esfera se mueve con velocidad uniforme. Ésta es la llamada *velocidad límite*.

El peso aparente de la esfera es igual al peso real, $m_e g$, menos el empuje de Arquímedes, igual al peso del líquido desalojado, $m_l g$. Poniendo estos pesos en función de las densidades respectivas, ρ_e y ρ_l, y recordando que el volumen de una esfera es $4\pi R^3/3$, la fuerza F_p que tiende a acelerar el movimiento es

$$F_p = \frac{4}{3}\pi R^3 (\rho_e - \rho_l) g$$

Igualando esta fuerza con la de arrastre dada en (1) se deduce la velocidad límite

$$v_{\text{lim}} = \frac{2(\rho_e - \rho_l)g}{9\eta} R^2 \qquad (2)$$

Esta velocidad es fácil de medir experimentalmente, si no es muy grande, cronometrando el tiempo que tarda la esfera en recorrer una distancia *L* a lo largo del líquido (figura 1) una vez alcanzada la velocidad límite, es decir sin tener en cuenta la primera parte del recorrido.

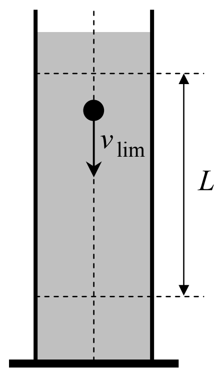

Fig. 1

Imagina que en el laboratorio dispones de una probeta grande llena de glicerina[3] y siete bolitas de acero, de radios diferentes y conocidos. Con un cronómetro manual mides el tiempo *t* que tarda cada bolita en recorrer una distancia *L* = 30,0 cm. Los radios de las esferas y los respectivos tiempos medidos[4] se presentan en la siguiente tabla.

R (mm)	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50
t (s)	20,82	13,38	9,20	6,75	5,26	4,17	3,28

a) Construye una tabla con los valores de R^2 y v_{lim} de las diferentes esferas. Dibuja en el papel milimetrado una gráfica con los puntos $(x, y) = (R^2, v_{\text{lim}})$.

b) Determina la pendiente de la recta que mejor se ajusta a estos puntos. Ten en cuenta que, según (2), la recta debe pasar por el origen.

c) Determina el coeficiente de viscosidad, η, de la glicerina.

d) Haz una estimación de la incertidumbre (margen de error) de la pendiente de la recta. Calcula la incertidumbre transmitida al coeficiente de viscosidad.

Datos: $\rho_e = 7{,}86 \cdot 10^3$ kg/m^3; $\rho_l = 1{,}264 \cdot 10^3$ kg/m^3; $g = 9{,}81$ m/s^2.

---

[3] La viscosidad de la glicerina a temperatura ambiente es bastante alta, de forma que al cabo de unos pocos milímetros de recorrido la velocidad de las bolitas ya es uniforme, es decir se ha alcanzado la velocidad límite.

[4] Para mejorar la precisión del resultado sería conveniente medir varias veces cada tiempo de caída y promediarlos, pero sólo se dispone de una bolita de cada radio y no es fácil sacarlas del fondo de la probeta para repetir la medida.