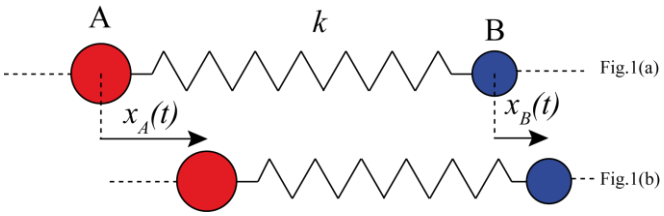
P1 .- Oscilaciones en una molécula diatómica lineal.

El modelo más simple que describe la vibración de una molécula diatómica lineal formada por dos átomos A y B de masas m_A y m_B es suponer que ambos átomos están unidos por un muelle elástico de constante *k*, tal como se muestra en la figura. En la Fig.1(a) los átomos de la molécula están en equilibrio de forma que el muelle está en reposo. Supongamos que ambos átomos son apartados del equilibrio, denotando por $x_A(t)$ y $x_B(t)$ los desplazamientos de los átomos A y B en cualquier instante del tiempo *t* respecto a sus posiciones de equilibrio (ver Fig.1(b)).



a) Mediante la Segunda Ley de Newton, escribir la ecuación del movimiento correspondiente a cada uno de los dos átomos de la molécula.

Como el sistema está únicamente sometido a fuerzas internas, sabemos que el centro de masas (CM) de la molécula va estar siempre en el mismo punto o se va a mover con velocidad constante. De este modo, y sin pérdida de generalidad, vamos a considerar que **el CM de la molécula está en el origen de coordenadas**.

b) Haciendo uso del resultado del apartado a), demostrar que la frecuencia ω con la que vibran los átomos de nuestra molécula es:

$$\omega = \sqrt{\frac{k(m_A + m_B)}{m_A m_B}},$$

Las vibraciones $x_A(t)$ y $x_B(t)$ que respecto a la posición de equilibrio describen las masas m_A y m_B son soluciones armónicas de las ecuaciones de movimiento. Una posible solución particular es la dada por

$$x_A(t) = a_1 \cos \omega t\,, \quad x_B(t) = a_2 \cos \omega t$$

c) Determinar la relación que existe entre las amplitudes a_1 y a_2 de las soluciones particulares anteriores. Dar una interpretación física del resultado de dicha relación.

SOLUCIÓN P1

a) Según el planteamiento del problema, podemos definir como $x_A(t) - x_B(t)$ la elongación del muelle en cualquier instante del tiempo t. De este modo, aplicando la Ley de Hooke y la Segunda Ley de Newton para la masa A (B) de la izquierda (derecha) tendremos que la ecuación del movimiento para cada átomo será:

$$m_A a_A(t) = -k(x_A(t) - x_B(t)), \quad (1)$$
$$m_B a_B(t) = -k(x_B(t) - x_A(t)), \quad (2)$$

siendo $a_A(t)$ y $a_B(t)$ las aceleraciones de A y B, respectivamente.

b) Como todas las fuerzas son internas, la posición del CM permance en el mismo punto o se mueve con velocidad constante. Como nos dicen que asumamos que el CM está siempre en el origen tendremos que:

$$x_{CM} = \frac{m_A x_A(t) + m_B x_B(t)}{m_A + m_B} = 0 \longrightarrow m_A x_A(t) + m_B x_B(t) = 0 \quad (3)$$

Despejamos de la expresión (3) el valor de $x_B(t)$ en función de $x_A(t)$ y lo llevamos a (1), y despejamos de la expresión (3) el valor de $x_A(t)$ en función de $x_B(t)$ y lo llevamos a (2). Obtendremos:

$$a_A(t) = -\frac{k(m_A + m_B)}{m_A m_B} x_A(t), \quad (4)$$
$$a_B(t) = -\frac{k(m_A + m_B)}{m_A m_B} x_B(t). \quad (5)$$

Lo que vemos es que las aceleraciones de A y B se expresan como:

$$a(t) = -\omega^2 x(t),$$

es decir, son osciladores armónicos que vibran con igual frecuencia ω dada por

$$\omega = \sqrt{\frac{k(m_A + m_B)}{m_A m_B}}.$$

c) La relación entre las amplitudes a_1 y a_2 podemos obtenerla de forma inmediata a partir de la expresión (3):

$$m_A x_A(t) = -m_B x_B(t) \longrightarrow \frac{a_1}{a_2} = -\frac{m_B}{m_A}.$$

Es decir, la vibración de las masas preserva la posición del CM, de tal forma que las masa oscilan con fases opuestas. Si instantáneamente una de ellas se mueve hacia la derecha, la otra lo hace hacia la izquierda. Y la relación entre las amplitudes de oscilación viene dada por la relación ente las masas, de forma que la más ligera oscila con una amplitud mayor que la más pesada.

P2 .- La submarinista.

Una submarinista pasa una mañana de sus vacaciones buceando en un mar en calma chicha a una cierta profundidad *h*. En un cierto momento, la submarinista al respirar exhala una burbuja de aire. Justo después de ser creada, la burbuja tiene un radio de *8 mm*. A medida que asciende hacia la superficie, la burbuja aumenta su tamaño hasta justo antes de llegar a la superficie del agua, donde alcanza un tamaño de radio *12.6 mm* y luego se rompe. Suponer que la forma de la burbuja es en todo momento esférica.

a) Suponiendo que la temperatura de la burbuja permanece constante, ¿cuál es la presión *P* a esa profundidad *h*, sabiendo que la presión atmosférica es de *101325 Pa*?

b) Sabiendo que la densidad ρ del agua del mar es de $1025\ kg/m^3$, ¿cuál es la profundidad *h* a la que bucea la submarinista?

Ayudas: Se aporta como ayuda el principio fundamental de la Hidrostática: $P_1 = P_2 + \rho\, g\, h$, donde P_1, y P_2 son las presiones en dos puntos de un fluido en reposo separados por una distancia vertical *h*, y siendo ρ la densidad del fluido. Volumen de la esfera: $V = 4/3\ \pi r^3$.

SOLUCIÓN P2

En el problema tenemos los siguientes datos:

$$r_0 = 8mm = 8 \times 10^{-3}m;\ r = 12.6mm = 1.26 \times 10^{-2}m;\ P_{atm} = 101325Pa;\ \rho = 1025\frac{kg}{m^3}$$

El oxigeno es un gas que, en condiciones generales, se puede considerar que sigue el comportamiento de un gas ideal. Por tanto, cumple la ecuación de estado de los gases ideales:

$$PV = nRT \tag{6}$$

Como nos dicen que la temperatura T de la burbuja permanece constante en su ascenso, podemos despejar la temperatura en la situación inicial y en la final, justo antes de llegar a la superficie

$$T = \frac{P_0 V_0}{nR} = \frac{P_f V_f}{nR}$$

Simplificando podemos expresar el valor de la presión a profundidad P_0 en términos de la presión en la superficie $P_f = P_{atm}$,

$$P_0 = \frac{P_f V_f}{V_0} = P_f(\frac{r_f^3}{r_0^3}) = P_f(\frac{12.6^3}{8^3}) \approx 3.91 P_f$$

La presión a la profundidad h se puede calcular teniendo en cuenta la ley de la hidrostática,

$$P_0 = P_f + \rho g h = P_{atm} + \rho g h \tag{7}$$

De ahí podemos despejar el valor de la profundidad h a la que nada la submarinista,

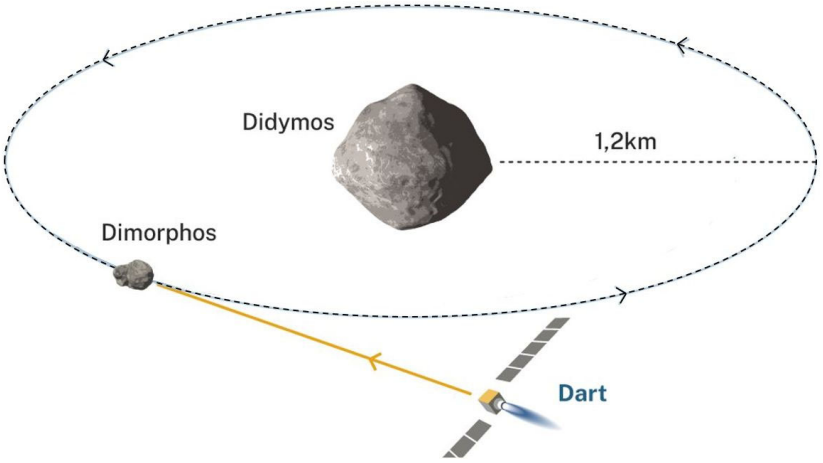
$$h = \frac{P_0 - P_f}{\rho g} = \frac{2.91 \times 101325Pa}{1025kg/m^3 \times 9.8m/s^2} \approx 29.35m \tag{8}$$

Sustituyendo en (7), el valor de la presión P_0 a la profundidad h es

$$P_0 = 101325Pa + 1025kg/m^3 \times 9.8 \times 29.35m = 396146Pa.$$

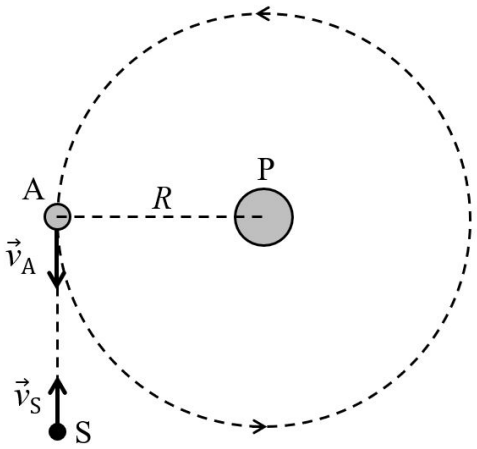
P3 - Desviar un asteroide.

El 27 de septiembre de 2022 tuvo lugar el momento crucial de la misión espacial DART de la NASA. Ese día se produjo el choque entre la sonda espacial DART y el asteroide Dimorphos. Este asteroide orbita como satélite alrededor de otro asteroide mayor llamado Didymos, formando ambos un sistema binario. El objetivo de esta misión era ensayar un método de defensa de la Tierra para desviar la trayectoria de futuros asteroides peligrosos por estar en rumbo de colisión contra nuestro planeta. Esta misión fue un éxito ya que tras la colisión se observó que el cambio en la órbita de Dimorphos fue mayor que el inicialmente previsto.



En este problema vamos a considerar el siguiente sistema planetario inspirado en esta misión DART. Un asteroide A de masa m_A describe una órbita circular de radio R alrededor de un planeta P de masa M.

a) Calcula el periodo orbital T del asteroide. Da el resultado en función de los datos. ¿Depende este periodo orbital T de la masa m_A del asteroide?



Se pretende modificar la órbita del asteroide enviando una sonda espacial S de masa $m_S = 0.1\ m_A$ para que choque con el asteroide. Un instante antes de la colisión las velocidades del asteroide y la sonda tienen la misma dirección, pero sentidos opuestos, como muestra la figura. Los módulos de las velocidades del asteroide y la sonda justo antes del choque son v_A y $v_S = 0.5\ v_A$ respectivamente. El choque es perfectamente inelástico, de manera que después de la colisión la sonda queda incrustada en el asteroide.

b) Calcula la velocidad que tiene el nuevo cuerpo (asteroide+sonda) justo tras el choque. Da el resultado en función de la velocidad inicial v_A del asteroide.

c) Calcula el nuevo radio R_f de la órbita del nuevo cuerpo (asteroide+sonda) tras el choque, suponiendo que esta nueva órbita es también circular. Da el resultado en función del radio inicial R.

d) Calcula el nuevo periodo orbital T_f del nuevo cuerpo (asteroide+sonda) tras el choque. Da el resultado en función del periodo orbital inicial T.

e) Calcula la masa que debería tener la sonda espacial S para que, con la misma velocidad inicial antes del choque, $v_S = 0.5\ v_A$, el periodo orbital final fuera el doble del periodo orbital inicial, $T_f = 2\ T$. Da el resultado en función de la masa m_A del asteroide.

f) ¿Qué cambiarías en el diseño de esta misión para que el periodo orbital final del nuevo cuerpo (asteroide+sonda) disminuyera en lugar de aumentar?

Solución P3

a) Aplicando al asteroide A la 2ª Ley de Newton y la Ley de Gravitación Universal:

$$F_{gravit} = m_A\, a_A \quad \Longrightarrow \quad G\frac{M\, m_A}{R^2} = m_A\, a_A$$

Como la órbita del asteroide es circular, su aceleración es normal o centrípeta: $a_A = \frac{v_A^2}{R}$.

Por lo tanto, $$G\frac{M\, m_A}{R^2} = m_A\frac{v_A^2}{R} \quad \Longrightarrow \quad v_A^2 = G\frac{M}{R} \qquad [1].$$

El periodo orbital del asteroide es:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_A} = \frac{2\pi R}{v_A} = 2\pi R\sqrt{\frac{R}{G\, M}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{G\, M}}} \qquad [2].$$

b) Durante el choque se conserva el momento lineal total del sistema asteroide-sonda:

$$\vec{P}_{ini} = \vec{P}_{fin} \quad \Longrightarrow \quad m_A\,\vec{v}_A + m_S\,\vec{v}_S = (m_A + m_S)\vec{v}_f \quad \Longrightarrow \quad m_A\, v_A - m_S\, v_S = (m_A + m_S)\, v_f$$

$$m_A\, v_A - 0.1\, m_A\, 0.5\, v_A = (m_A + 0.1\, m_A)\, v_f \quad \Longrightarrow \quad (1 - 0.05)\, m_A\, v_A = (1 + 0.1)\, m_A\, v_f$$

$$v_f = \frac{0.95}{1.1}\, v_A \quad \Longrightarrow \quad \boxed{v_f = 0.86\, v_A}$$

c) Teniendo en cuenta la ecuación [1],

en la órbita inicial, el radio de la órbita es: $$R = G\frac{M}{v_A^2} \quad \Longrightarrow \quad GM = Rv_A^2.$$

En la órbita final, el radio de la órbita es: $$R_f = G\frac{M}{v_f^2} \quad \Longrightarrow \quad GM = Rv_f^2.$$

Combinando ambas ecuaciones $$Rv_f^2 = Rv_A^2 \quad \Longrightarrow \quad R_f = R\,\frac{v_A^2}{v_f^2} \quad \Longrightarrow$$

$$R_f = R\frac{v_A^2}{(0.86\, v_A)^2} = R\frac{1}{0.86^2} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{R_f = 1.35\, R}$$

d) Teniendo en cuenta el apartado a),

en la órbita inicial, el periodo orbital es: $$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{G\, M}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{2\pi}{\sqrt{G\, M}} = \frac{T}{R^{3/2}}.$$

En la órbita final, el periodo orbital es: $$T_f = 2\pi\sqrt{\frac{R_f^3}{G\, M}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{2\pi}{\sqrt{G\, M}} = \frac{T_f}{R_f^{3/2}}.$$

Combinando ambas ecuaciones $$\frac{T_f}{R_f^{3/2}} = \frac{T}{R^{3/2}} \quad \Longrightarrow \quad T_f = T\,\frac{R_f^{3/2}}{R^{3/2}} \quad \Longrightarrow$$

$$T_f = T\,\frac{(1.35\, R)^{3/2}}{R^{3/2}} = T\,(1.35)^{3/2} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{T_f = 1.57\, T}$$

e) En este caso, $m_S = x\, m_A$ y $m v_S = 0.5\, v_A$ y la incógnita a resolver es x.

Considerando de nuevo el choque, como en el apartado b),

$$m_A\, v_A - m_S\, v_S = (m_A + m_S)\, v_f \quad \Rightarrow \quad m_A\, v_A - x\, m_A\, 0.5\, v_A = (m_A + x\, m_A)\, v_f \quad \Rightarrow$$

$$(1 - 0.5\, x)\, m_A\, v_A = (1 + x)\, m_A\, v_f \quad \Rightarrow \quad v_f = \left(\frac{1 - 0.5\, x}{1 + x}\right) v_A$$

De la resolución del apartado c), tenemos que:

$$R_f = R\, \frac{v_A^2}{v_A^2} \left(\frac{1 + x}{1 - 0.5\, x}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad R_f = R \left(\frac{1 + x}{1 - 0.5\, x}\right)^2$$

Y de la resolución del apartado d), tenemos que:

$$T_f = T\, \frac{R_f^{3/2}}{R^{3/2}} \quad \Rightarrow \quad T_f = T\, \frac{1}{R^{3/2}}\, R^{3/2} \left[\left(\frac{1 + x}{1 - 0.5\, x}\right)^2\right]^{3/2} \quad \Rightarrow \quad T_f = T \left(\frac{1 + x}{1 - 0.5\, x}\right)^3$$

Por otra parte, queremos que el periodo orbital final sea el doble del inicial, es decir, $T_f = 2T$.

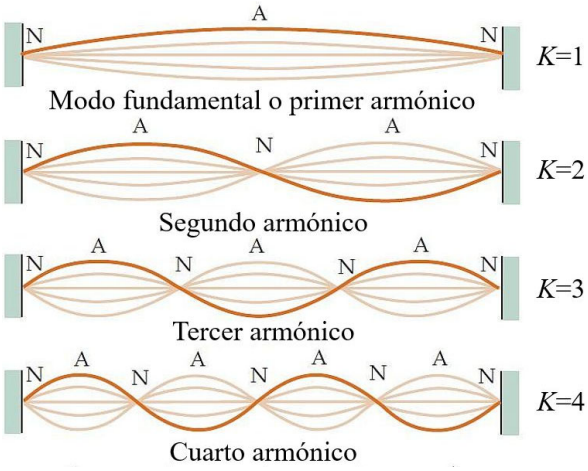
Por lo tanto,

$$2T = T \left(\frac{1 + x}{1 - 0.5\, x}\right)^3 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{2}(1 - 0.5\, x) = 1 + x \quad \Rightarrow$$

$$x = \frac{\sqrt[3]{2} - 1}{1 + 0.5\, \sqrt[3]{2}} \quad \Rightarrow \quad x = 0.16 \quad \Rightarrow \quad \boxed{m_S = 0.16\, m_A}$$

f) Antes del choque la sonda se debería mover en la misma dirección y sentido que el asteroide, y no en sentidos opuestos. Además, la velocidad inicial de la sonda debería ser mayor que la velocidad inicial del asteroide. De esta manera, teniendo en cuenta la resolución del apartado b), después del choque la velocidad del cuerpo asteroide+sonda sería mayor que la velocidad inicial del asteroide. Por lo tanto, el radio de la órbita final sería menor. Y, por lo tanto, el periodo orbital final sería menor.

4.- Prueba experimental: Ondas estacionarias en una cuerda tensa.



Cuando se hace vibrar una cuerda tensa con sus dos extremos fijos, puede aparecer en la cuerda el fenómeno de las **ondas estacionarias**. Las ondas estacionarias son un tipo de ondas que están confinadas y no se propagan por la cuerda. Este tipo de ondas aparecen como resultado de la interferencia entre dos ondas viajeras de la misma amplitud y frecuencia pero que se propagan en sentidos opuestos.

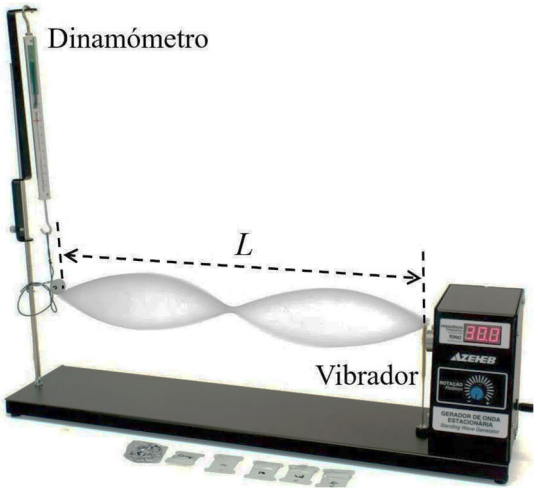
Cuando aparece una onda estacionaria en una cuerda tensa, hay puntos de la misma, llamados **nodos**, en los cuales la cuerda no vibra en absoluto. En cambio, hay otros puntos de la cuerda, llamados **vientres o antinodos**, en los cuales la cuerda vibra con máxima amplitud, como muestra la figura.

Dependiendo de la frecuencia f de excitación con que se hace vibrar la cuerda, y de la tensión T en la cuerda, la onda estacionaria puede aparecer con distinto número de vientres, como muestra la figura. A cada una de estas formas distintas de una onda estacionaria se le llama **modo de vibración o armónico**.

Se puede demostrar que, cuando en una cuerda tensa con sus dos extremos fijos aparece una onda estacionaria con un número K de antinodos, la frecuencia f de la vibración de excitación está relacionada con la tensión T en la cuerda mediante esta ecuación:

$$T = 4L^2 f^2 \mu \frac{1}{K^2} \qquad (1)$$

donde L es la longitud de la cuerda y μ es la densidad lineal de masa de la cuerda. Es decir, que, si la cuerda tiene una masa m, entonces $\mu = m/L$.



En la figura se muestra un montaje experimental utilizado para generar ondas estacionarias en una cuerda tensa. En este caso, la frecuencia f de la vibración de excitación tiene un valor fijo $f = 100\ Hz$. La tensión T en la cuerda se mide con el dinamómetro vertical. El valor de esta tensión T se puede variar desplazando verticalmente el dinamómetro. En este caso, la longitud de la cuerda es $L = 1.64\ m$.

Con ese montaje se han conseguido generar 6 ondas estacionarias con diferente número K de vientres. La tabla siguiente muestra las seis de parejas de valores K de los números de vientres y los correspondientes valores de la tensión T de la cuerda en cada caso.

K	4	5	6	7	9	11
T **(N)**	3.1	1.9	1.3	1.0	0.6	0.4

a) Anota en una tabla como la siguiente las 6 parejas de valores de $1/K^2$ y sus correspondientes valores de la tensión T. Redondea los valores de $1/K^2$ a 3 decimales.

$\mathbf{1/K^2}$						
$\boldsymbol{T}$ **(N)**	3.1	1.9	1.3	1.0	0.6	0.4

b) Representa gráficamente en el papel milimetrado los puntos experimentales del valor $1/K^2$ frente a la tensión T: $(x, y) = (1/K^2, T)$.

c) Ajusta a una recta los puntos obtenidos en la gráfica anterior.

d) A partir de este ajuste, determina el valor de la densidad lineal de masa μ de la cuerda.

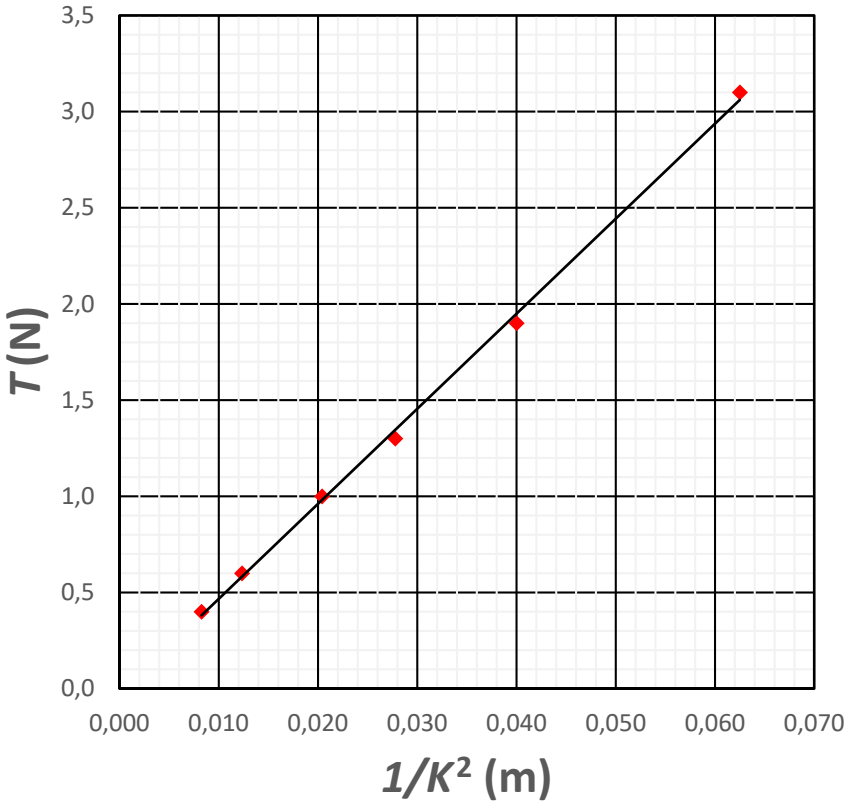
e) A partir de este ajuste, calcula el valor que debe tener la tensión T en la cuerda para generar la onda estacionaria de armónico K= 3.

Solución P4

a)

$1/K^2$	0.063	0.040	0.028	0.020	0.012	0.008
T (N)	3.1	1.9	1.3	1.0	0.6	0.4

b) c)



d) Calculamos la pendiente aproximada de la recta utilizando los puntos experimentales más extremos

$$p = \frac{T_1 - T_6}{1/K_1^2 - 1/K_6^2} = \frac{3.1 - 0.4}{0.063 - 0.008} \quad \Longrightarrow \quad p = 49.1$$

Por lo tanto, despreciando el término independiente, la ecuación de la recta de ajuste se puede escribir como:

$$T = p\frac{1}{K^2} = 49.1\frac{1}{K^2}.$$

Comparando esta ecuación con la ecuación (1) del enunciado tenemos que:

$$p = 4\,L^2\,f^2\mu \quad \Longrightarrow \quad \mu = \frac{p}{4\,L^2\,f^2} = \frac{49.1}{4 \cdot 1.64^2 \cdot 100^2} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\mu = 4.56 \cdot 10^{-4}\ \text{kg/m}.}$$

e) De acuerdo con la ecuación de la recta de ajuste, para generar la onda estacionaria de armónico $K = 3$, el valor que debería tener la tensión de la cuerda es:

$$T = p\frac{1}{K^2} = 49.1\ \frac{1}{3^2} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{T = 5.4\ \text{N}}$$