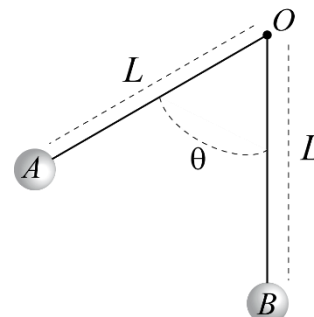




P1.- Choque de dos péndulos simples.

Se tienen dos péndulos simples A y B de longitud L , uno con masa $m_A = M$ y otro con masa $m_B = \alpha \cdot M$, siendo $\alpha > 0$ un parámetro. Ambos péndulos cuelgan del mismo punto O . Inicialmente, los dos péndulos están en reposo, pero desviado el péndulo A de la posición de equilibrio un ángulo θ , como se muestra en la figura. En el instante $t=0$ se libera el péndulo A .



- a) Calcular la velocidad v_A con que impacta el péndulo A contra el péndulo B si $\alpha=1$, $L=1\text{ m}$ y $\theta=60^\circ$. Tomar $g=10\text{ m/s}^2$.

Queremos ahora calcular el tiempo δt que tarda el péndulo A en chocar contra el péndulo B . Para ello vamos a utilizar la fórmula

$$\tau = \tau_o \left(1 + \frac{\theta^2}{16} \right),$$

que determina de forma muy aproximada el periodo τ de un péndulo en función del periodo τ_o del mismo péndulo para oscilaciones pequeñas, y de la amplitud θ de la oscilación expresada en radianes.

- b) Demostrar que el periodo de oscilación τ_o de un péndulo simple de longitud L para amplitudes pequeñas de oscilación viene dado por

$$\tau_o = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}},$$

siendo g la aceleración de la gravedad. Recuerda que, cuando el ángulo θ es pequeño, podemos aproximar el valor del seno del ángulo por el valor de dicho ángulo. Es decir:

$$\text{sen } \theta \approx \theta.$$

- c) Calcula el tiempo de impacto δt si $\alpha=1$, $L=1\text{ m}$ y $\theta=60^\circ$. Tomar $g=10\text{ m/s}^2$.

Supongamos que los péndulos son bolas macizas de acero y que, por tanto, podemos considerar que el choque entre ellos es elástico (se conserva la energía cinética total del sistema en el choque).

- d) Asumiendo que v_A es la velocidad con que impacta el péndulo A contra el péndulo B , calcula, en función de v_A y α , la velocidad de cada péndulo tras el choque.
- e) Determina para que rango de valores del parámetro α los péndulos salen rebotados del choque desviándose cada uno hacia un lado.



Solución P1

a) Aplicando conservación de la energía:

$$(E_A)_{inicial} = m_A g h_A = (E_A)_{final} = \frac{1}{2} m_A v_A^2$$

Siendo $h_A = L(1 - \cos \theta) = L \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{L}{2}$. Sustituyendo los datos y despejando, se obtiene que:

$$v_A = \sqrt{10}m$$

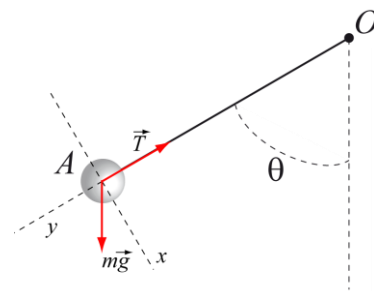
b) La aceleración tangencial $a_t = \frac{dv_A}{dt}$ aparece en la ecuación del movimiento según el eje x :

$$-mg \sin \theta = ma_t.$$

Asumiendo que $\theta \approx 0$:

$$-g \sin \theta \approx g \theta = a_t = L \frac{d^2 \theta}{dt^2} = L \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \theta$$



Por tanto, se obtiene la ecuación del movimiento del oscilador armónico, de la cual se deduce que $\omega^2 = \frac{g}{L}$.
Por tanto, el periodo es

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

c) Sustituyendo en la ecuación $\theta = \pi/3$ en la ecuación se obtiene que $\Delta t \approx 0.53$ s

d) En el choque se conserva el momento lineal total y la energía cinética total al ser elástico.

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B$$

$$m_A v_A^2 + m_B v_B^2 = m_A v'^2_A + m_B v'^2_B$$

Sabemos que $v_B = 0$, $m_A = M$, $m_B = \alpha M$.

Despejando en función de v_A y de α se obtiene que:

$$v'_A = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} v_A, \quad v'_B = \frac{2v_A}{1 + \alpha}$$

e) Para que las bolas salgan con velocidades opuestas se tiene que cumplir que $\alpha > 1$, ya que la bola B siempre sale con velocidad hacia la derecha.

g)

P2.- Gas Ideal, muelle y rozamiento.

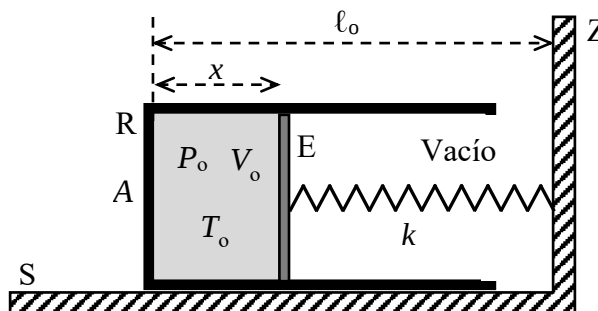
Cierta cantidad de un gas ideal está contenido en un recipiente R. El recipiente está cerrado por su lado derecho mediante un émbolo móvil E que puede deslizarse sin rozamiento dentro del recipiente, como indica la figura. El área del émbolo y de la sección transversal del recipiente es A . El émbolo E está unido a un muelle de constante elástica k que está conectado a un tabique vertical fijo Z. La longitud natural del muelle ℓ_0 coincide con la distancia entre la pared izquierda del recipiente y el tabique Z.

El recipiente está apoyado sobre un suelo horizontal S rugoso. El coeficiente de rozamiento estático entre el suelo y el recipiente es μ_e .

La masa total del recipiente R y del gas es M .

En el exterior del recipiente está hecho el vacío.

Inicialmente el gas se encuentra en un estado de equilibrio O con presión P_0 , temperatura absoluta T_0 y volumen V_0 , de manera que el émbolo E se encuentra a una distancia $x = L$ de la pared izquierda del recipiente.



- a) Calcula el valor de la presión inicial P_0 del gas en este estado inicial O. Da el resultado en función de k , A y L .

El gas se calienta muy lentamente mediante una resistencia eléctrica (no mostrada en la figura). Podemos considerar que este calentamiento se realiza de forma cuasiestática, es decir, que el gas cumple en todo momento la ecuación de estado de los gases ideales. Debido a este calentamiento, el gas sufre un proceso de expansión en el cual el émbolo E se desplaza hacia la derecha comprimiendo más el muelle. Durante esta expansión del gas, el recipiente se mantiene en equilibrio estático sin deslizarse a hacia la izquierda por efecto del rozamiento con el suelo.

- b) Calcula el valor de la temperatura absoluta T_1 del gas cuando alcanza otro estado de equilibrio 1 en el que $x = 3L/2$. Da el resultado en función solamente de T_0 .

A partir de ese estado de equilibrio el gas se sigue calentando y expandiendo sin que el recipiente deslice hacia la izquierda.

- c) Calcula el módulo de la fuerza de rozamiento que ejerce el suelo S sobre el recipiente cuando $x = 3L/2$. Da el resultado en función de k y L .

Llega un momento en el cual el recipiente está a punto de deslizarse hacia la izquierda. Se sabe que el módulo del peso total del recipiente y el gas encerrado es $Mg = 10kL$ y que el valor del coeficiente de rozamiento estático entre el suelo y el recipiente es $\mu_e = 0.2$.

- d) Calcula el valor de la distancia x en el momento en el que el recipiente está a punto de deslizarse hacia la izquierda. Da el resultado en función solo de L .
- e) Calcula el valor de la temperatura absoluta del gas en el momento en el que el recipiente esté a punto de deslizarse hacia la izquierda. Da el resultado en función solo de T_0 .



Solución P2

- a) En el estado de equilibrio inicial 0, como el émbolo está en equilibrio, la fuerza que ejerce el muelle sobre el émbolo es igual y opuesta a la fuerza que ejerce el gas sobre el émbolo:

$$F_{gas\ 0} = F_{m0} \Rightarrow A P_0 = k L \Rightarrow P_0 = \frac{k L}{A}$$

- b) En el nuevo estado de equilibrio 1, ocurre otra vez que la fuerza que ejerce el muelle sobre el émbolo es igual y opuesta a la fuerza que ejerce el gas sobre el émbolo:

$$F_{gas\ 1} = F_{m1} \Rightarrow A P_1 = k \frac{3}{2} L \Rightarrow P_1 = \frac{3}{2} \frac{k L}{A} \Rightarrow P_1 = \frac{3}{2} P_0$$

Por otro lado, el volumen del gas en este estado de equilibrio 1 es:

$$V_1 = A x = A \frac{3}{2} L \Rightarrow V_1 = \frac{3}{2} V_0$$

Aplicando ahora la ecuación de estado de los gases ideales a los estados de equilibrio 0 y 1:

$$\frac{P_0 V_0}{T_0} = \frac{P_1 V_1}{T_1} \Rightarrow T_1 = T_0 \frac{P_1 V_1}{P_0 V_0} = T_0 \frac{\frac{3}{2} P_0 \frac{3}{2} V_0}{P_0 V_0} \Rightarrow T_1 = \frac{9}{4} T_0 \Rightarrow T_1 = 2.25 T_0$$

- c) Sobre el **recipiente** están actuando dos fuerzas en dirección horizontal. Por un lado, en la pared izquierda del recipiente el gas ejerce una fuerza hacia la izquierda. Por otro lado, en la base del recipiente el suelo ejerce una fuerza de rozamiento estático hacia la derecha. En el estado de equilibrio 1, estas dos fuerzas son iguales y opuestas:

$$F_{roz\ est\ 1} = F_{gas\ 1} \Rightarrow F_{roz\ est\ 1} = A P_1 = A \frac{3}{2} P_0 = A \frac{3}{2} \frac{k L}{A} \Rightarrow F_{roz\ est\ 1} = \frac{3}{2} k L$$

- d) En el estado de equilibrio final, cuando el recipiente está a punto de deslizarse hacia la izquierda la fuerza de rozamiento estático alcanza su **valor máximo** que es

$$F_{roz\ est\ max} = \mu_e N = \mu_e M g$$

Como el recipiente está a punto de deslizarse, pero se mantiene en equilibrio, sigue cumpliéndose que la fuerza que ejerce el gas sobre la pared izquierda del recipiente es igual y opuesta a la fuerza de rozamiento estático:

$$F_{roz\ est\ max} = F_{gas\ f} \Rightarrow \mu_e M g = A P_f$$

Por otra parte, en este estado de equilibrio final, la fuerza que ejerce el muelle sobre el émbolo es igual y opuesta a la fuerza que ejerce el gas sobre el émbolo:

$$F_{gas\ f} = F_{mf} \Rightarrow A P_f = k x_f \Rightarrow P_f = \frac{k x_f}{A}$$

Combinando las dos últimas ecuaciones tenemos que:

$$\mu_e M g = A \frac{k x_f}{A} \Rightarrow x_f = \frac{\mu_e M g}{k}$$

Teniendo en cuenta que $M g = 10 k L$ y que $\mu_e = 0.2$, resulta que:

$$x_f = \frac{0.2 \cdot 10 k L}{k} \Rightarrow x_f = 2 L$$

- e) Aplicando la ecuación de estado de los gases ideales a los estados de equilibrio inicial 0 y final f:



O.E.F. 2022 PRUEBAS DEL DISTRITO UNIVERSITARIO DE LA RIOJA
REAL SOCIEDAD ESPAÑOLA DE FÍSICA

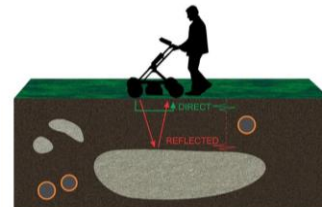


$$\frac{P_o V_o}{T_o} = \frac{P_f V_f}{T_f} \Rightarrow T_f = T_o \frac{P_f V_f}{P_o V_o} = T_o \frac{\frac{k x_f}{A} A x_f}{\frac{k L}{A} A L} \Rightarrow T_f = T_o \frac{x_f^2}{L^2} = T_o \frac{(2 L)^2}{L^2} \Rightarrow$$

$$T_f = 4 T_o$$

P3.- El georradar.

El radar de penetración terrestre (GPR) se utiliza para detectar y localizar objetos subterráneos cerca de la superficie mediante la transmisión de ondas electromagnéticas al suelo y la recepción de las ondas reflejadas por esos objetos. La antena y el detector están directamente en el suelo y se ubican en el mismo punto.



Un georradar emite ondas electromagnéticas que se pueden modelar mediante expresiones trigonométricas atenuadas por una exponencial. Una onda electromagnética plana polarizada linealmente de frecuencia angular ω que se propaga en la dirección z se representa mediante la siguiente expresión para el campo eléctrico:



$$E = E_0 e^{-\beta z} \cos(\omega t - kz), \quad (1)$$

donde $E_0 e^{-\beta z}$ es la amplitud, β es el coeficiente de atenuación, E_0 es la amplitud máxima y k es el número de onda. Los valores de β y k dependen de la frecuencia ω de la onda y de las características del medio por el que se propaga:

(2)

$$\beta = \omega \cdot \sqrt{\frac{\mu \varepsilon}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 \omega^2}} - 1 \right)} \quad k = \omega \cdot \sqrt{\frac{\mu \varepsilon}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 \omega^2}} + 1 \right)}$$

siendo ε la permitividad dieléctrica, μ la permeabilidad magnética y σ la conductividad eléctrica.

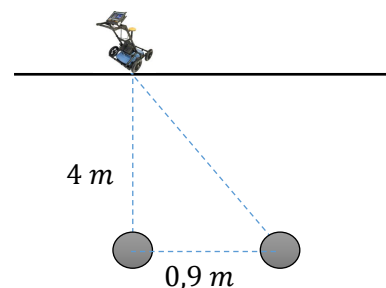
- a) Asumiendo que la tierra es paramagnética ($\mu = \mu_0$) y que su conductividad es baja ($\varepsilon \omega \gg \sigma$), deduce una expresión sencilla para la velocidad de propagación de las ondas en función de μ y ε .

La señal deja de ser detectada cuando la amplitud E de la señal del radar que llega al objeto cae por debajo de $1/e$ (37%) de su valor inicial.

- b) Para un terreno que verifica las condiciones del apartado anterior, con conductividad $\sigma = 1 \text{ m}/\Omega$ y permitividad $\varepsilon = 9\varepsilon_0$, halla la máxima profundidad d a la que puede encontrarse un objeto para ser detectado por el GPR.

Nota: cuando $x \ll 1$ podemos aproximar $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$.

Normalmente se utiliza una onda electromagnética de frecuencia variable (10 MHz – 1000 MHz) para permitir el ajuste del alcance y la resolución de la detección. Así, el rendimiento del GPR depende de su resolución, que viene dada por la mínima separación entre dos objetos reflectores adyacentes a detectar. La separación mínima debe dar lugar a una diferencia de fase de $\pi \text{ rad}$ entre las dos ondas reflejadas sobre los objetos.



- c) Considera dos objetos enterrados horizontalmente a una profundidad de 4 m y separados entre sí 90 cm. En un instante en el que el GPR se encuentra sobre la vertical de uno de ellos, calcula la frecuencia mínima necesaria para poder detectarlos.



Datos: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T m/A}$, $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N m}^2$

Solución P3

- a) El número de onda k es la cantidad de ciclos que caben en la unidad de distancia: $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Por otro lado, asumiendo que la velocidad de propagación es constante, tenemos que $\lambda = vT = v \frac{2\pi}{\omega}$. Si combinamos ambas expresiones nos queda:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\omega}{2\pi v} = \frac{\omega}{v} \Rightarrow v = \frac{\omega}{k}$$

Dado que $\frac{\sigma}{\varepsilon\omega} \ll 1$, el número de onda se reduce a la siguiente expresión:

$$k = \omega \cdot \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}} + 1 \right)} \approx \omega \cdot \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2} (\sqrt{1} + 1)} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

Y, por tanto, la velocidad aproximada será:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

- b) La señal llega a su límite de detección para una profundidad d cuando la amplitud se ha reducido a $1/e$ de su valor inicial, luego se cumplirá $E_0 e^{-\beta d} = \frac{E_0}{e}$. Entonces $\beta d = 1$ y por tanto $\beta = \frac{1}{d}$, es decir, la profundidad máxima de detección es inversamente proporcional a la constante de atenuación.

$$d = \frac{1}{\beta} = \left[\omega \cdot \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}} - 1 \right)} \right]^{-1} \approx \left[\omega \cdot \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2} - 1 \right)} \right]^{-1} = \frac{2}{\sigma} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}$$

Para un medio de conductividad $\sigma = 1 \text{ mS/m}$ y permitividad $\varepsilon = 9\varepsilon_0$ la profundidad máxima resulta:

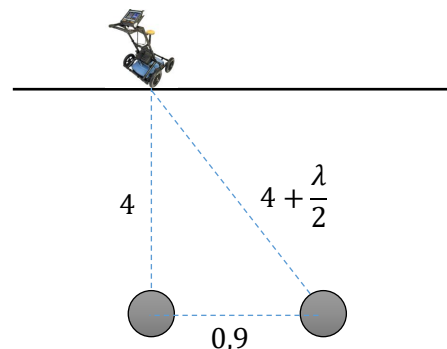
$$d = \frac{2}{0,001} \sqrt{\frac{9 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}}{4\pi \cdot 10^{-7}}} = \mathbf{15,92 \text{ m}}$$

- c) La mínima diferencia de fase entre las dos señales en un mismo instante es

$$(\omega t - kz_2) - (\omega t - kz_1) = k(z_2 - z_1) = \pi$$

$$z_2 - z_1 = \frac{\pi}{k} = \frac{\pi}{2\pi/\lambda} = \frac{\lambda}{2}$$

Es decir, la diferencia de caminos recorridos es media longitud de onda.





O.E.F. 2022 PRUEBAS DEL DISTRITO UNIVERSITARIO DE LA RIOJA
REAL SOCIEDAD ESPAÑOLA DE FÍSICA



Aplicamos el Teorema de Pitágoras:

$$\left(4 + \frac{\lambda}{2}\right)^2 = 4^2 + 0,9^2$$

$$\lambda^2 + 16\lambda - 3,24 = 0 \rightarrow \lambda = 0,2 \text{ m}$$

En este medio la señal se propaga a una velocidad

$$v = \frac{1}{\sqrt{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 9 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}}} = 10^8 \text{ m/s } (c/3)$$

Por tanto, la mínima frecuencia para la resolución pedida será:

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{10^8}{0,2} = \mathbf{500 \text{ MHz}}$$

P4.- Prueba experimental: Red de difracción y longitud de onda de una luz láser.

Una red de difracción es un dispositivo óptico que consiste en una superficie plana con un gran número N de rendijas paralelas muy estrechas y separadas la misma distancia d . La foto de la derecha muestra una red de difracción de 600 *rendijas/mm*.



Una red de difracción se puede utilizar para medir la longitud de onda λ de una luz monocromática desconocida. Cuando un haz de luz monocromática (con una sola longitud de onda) se proyecta sobre una red de difracción, cada una de las rendijas de la red de difracción se comporta como una fuente puntual de ondas luminosas.

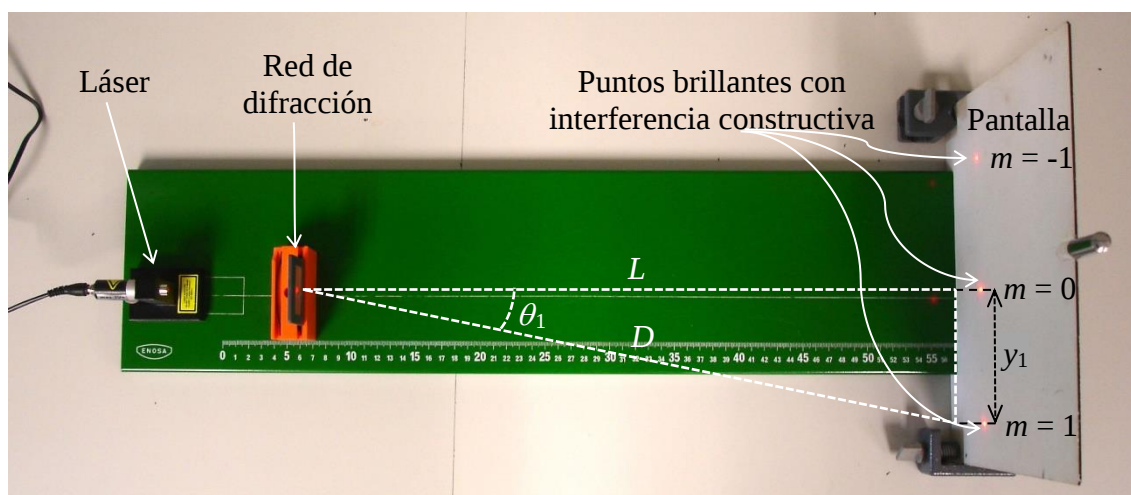
Como las ondas de luz que salen de cada rendija provienen del mismo haz inicial, son ondas coherentes y por lo tanto pueden producir fenómenos de interferencia cuando coinciden en el espacio. De hecho, si delante de la red de difracción se coloca una pantalla, sobre la misma se formará un diagrama de interferencias en el que aparecen puntos aislados intensamente iluminados. Esos puntos son muy brillantes porque en ellos ocurre una interferencia constructiva entre todas las ondas de luz que llegan de todas las rendijas.

Las ondas luminosas interfieren constructivamente cuando la diferencia de caminos recorridos por cada onda es un múltiplo entero de la longitud de onda λ de la luz monocromática utilizada. Esto implica que los puntos brillantes de la pantalla con interferencia constructiva están localizados en ángulos θ_m que cumplen la ecuación:

$$d \sin \theta_m = m \lambda \quad \text{con } m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (1)$$

donde al número entero m se le llama el orden del máximo interferencial, y se corresponde con cada uno de los puntos brillantes. Al punto brillante central le corresponde el número de orden $m = 0$.

La siguiente fotografía muestra, visto desde arriba, el montaje experimental usado para determinar la longitud de onda λ de una luz láser desconocida.



Teniendo en cuenta la geometría del montaje experimental, tenemos que para el punto brillante con $m = 1$:

$$\sin \theta_1 = \frac{y_1}{\sqrt{L^2 + y_1^2}} = \frac{y_1}{D},$$



O.E.F. 2022 PRUEBAS DEL DISTRITO UNIVERSITARIO DE LA RIOJA
REAL SOCIEDAD ESPAÑOLA DE FÍSICA



donde L es la distancia entre la red de difracción y la pantalla, e y_1 es la distancia entre el punto brillante central y el punto brillante de orden $m = 1$.

Por lo tanto, para el punto brillante de orden $m = 1$, la ecuación (1) se puede expresar como:

$$y_1 = \frac{\lambda}{d} D \quad (2)$$

La distancia L entre la pantalla y la red de difracción se puede variar a voluntad, con lo cual también variará la distancia y_1 entre el punto brillante central y el punto brillante de orden $m = 1$.

La tabla siguiente muestra seis de parejas de valores de la distancia L con sus correspondientes valores de la distancia y_1 .

$L \text{ (m)}$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$y_1 \text{ (m)}$	0.021	0.042	0.061	0.081	0.102	0.119

- Sabiendo que la red de difracción utilizada tiene **300 rendijas/mm**, calcula el valor de la distancia d entre cada par de rendijas consecutivas. Atención: d es la distancia entre los centros de dos rendijas consecutivas. Expresa el resultado en metros.
- Calcula los 6 valores de la distancia D correspondientes a cada pareja de valores L e y_1 . Anota en una tabla como la siguiente las 6 parejas de valores de D e y_1 . Redondea los valores de D a 3 decimales.

$D \text{ (m)}$						
$y_1 \text{ (m)}$						

- Representa gráficamente en el papel milimetrado los puntos experimentales de la distancia y_1 frente a la distancia D : $(x, y) = (D, y_1)$.
- Ajusta a una recta los puntos obtenidos en la gráfica anterior.
- A partir de este ajuste, determina el valor de la longitud de onda λ de la luz láser utilizada.



Solución P4

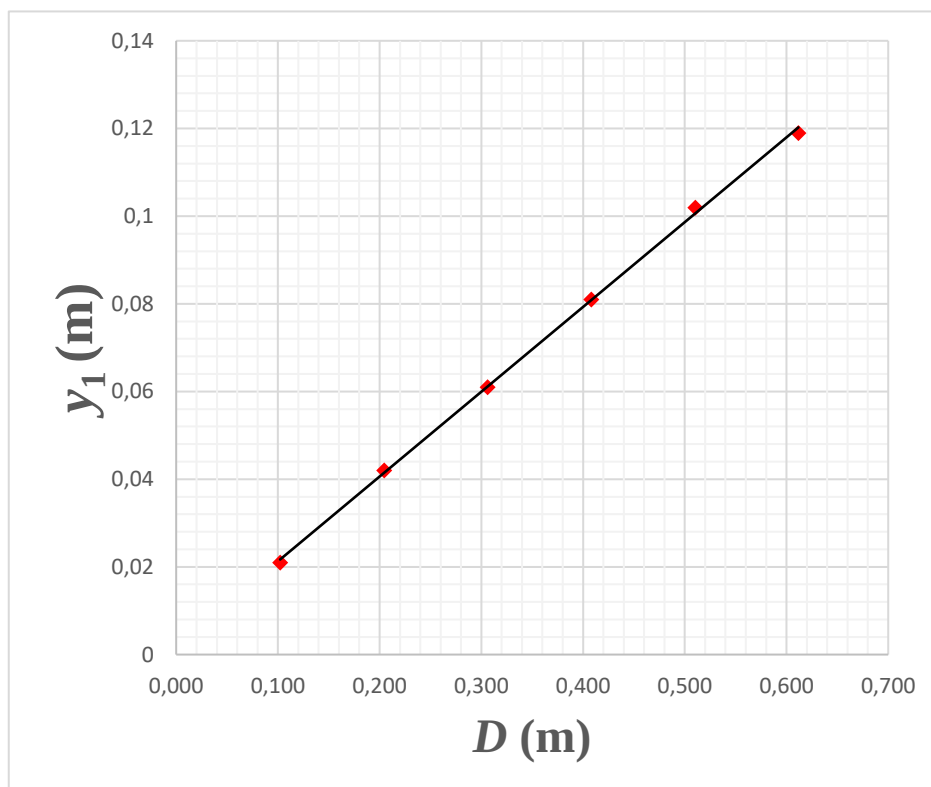
- a) Llamando $L = 1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m}$. La distancia d entre dos rendijas consecutivas en una red de difracción de 300 rendijas/mm es:

$$d = \frac{L}{N} = \frac{10^{-3}}{300} \implies d = 3.3 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

b)

$L \text{ (m)}$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$y_1 \text{ (m)}$	0.021	0.042	0.061	0.081	0.102	0.119
$D \text{ (m)}$	0.102	0.204	0.306	0.408	0.510	0.612

c)



- d) y e) Calculamos la pendiente aproximada de la recta utilizando los puntos experimentales más extremos

$$p = \frac{y_{16} - y_{11}}{D_{16} - D_{11}} = \frac{0.119 - 0.021}{0.612 - 0.102} \implies p = 0.192$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta de ajuste se puede escribir como: $y_1 = p D$

Comparando esta ecuación con la ecuación (2) del enunciado tenemos que:

$$p = \frac{\lambda}{d} \implies \lambda = p d = 0.192 \cdot 3.3 \cdot 10^{-6} \implies \lambda = 6.34 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 634 \text{ nm}$$