

P1.- Choques elásticos.

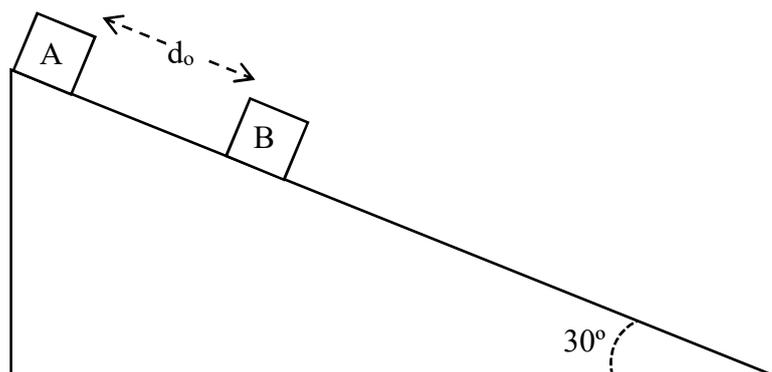
Dos bloques A y B de igual masa se encuentran en un plano inclinado fijo que forma un ángulo de 30° con la horizontal. En el instante inicial, $t = 0$, el bloque B está a una distancia $d_0 = 5$ cm por debajo del bloque A, como indica la figura, y ambos se encuentran en reposo. Suponer que los coeficientes de rozamiento estático y dinámico entre cada bloque y el plano inclinado son iguales. Los valores de los coeficientes de rozamiento para los bloques A y B son:

$$\mu_A = \frac{\sqrt{3}}{6}, \quad \mu_B = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

Asumir que los bloques permanecen en el plano inclinado durante todo el proceso y despreciar el tamaño de los bloques. Suponer que los bloques chocan elásticamente.

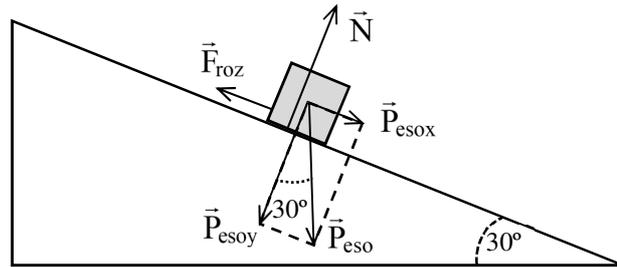
En la resolución de este problema usar $g = 10 \text{ m/s}^2$. Se pide determinar:

- La distancia que recorre cada bloque antes del primer choque entre ambos.
- El tiempo que transcurre hasta que chocan por primera vez.
- La velocidad de cada bloque justo antes del primer choque entre ambos.
- Las velocidades de cada bloque justo tras el primer choque.
- El tiempo que transcurre entre el primer y el segundo choque entre los bloques.
- La distancia que recorre cada bloque entre el primer y segundo choque.



Problema P1: Solución

a) Diagrama del cuerpo libre de un bloque sobre el plano inclinado



Segunda ley de Newton aplicada en la dirección X paralela al plano inclinado:

$$P_{esox} - F_{roz} = m a \implies m g \sin 30 - \mu m g \cos 30 = m a \implies a = \frac{g}{2} (1 - \mu \sqrt{3})$$

$$\text{Para el bloque A: } a_A = \frac{g}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{6} \sqrt{3} \right) = \frac{g}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \right) \implies a_A = \frac{g}{4}$$

$$\text{Para el bloque B: } a_B = \frac{g}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{3} \right) = \frac{g}{2} (1 - 1) \implies a_B = 0 \implies \text{B se mueve con } v = \text{cte}$$

Por lo tanto, la distancia que recorre el bloque A hasta el primer choque es $d_A = d_o = 5 \text{ cm}$.

Y la distancia que recorre el bloque B hasta el primer choque es $d_B = 0 \text{ cm}$.

b) El bloque A describe un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, por lo tanto,

$$d_o = \frac{1}{2} a_A t_1^2 \implies t_1 = \sqrt{\frac{2d_o}{a_A}} = \sqrt{\frac{8d_o}{g}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 0.05}{10}} \implies t_1 = 0.2 \text{ s}$$

$$\text{c) } v_A = a_A t_1 \implies v_A = a_A t_1 = \frac{g}{4} t_1 = \frac{10}{4} \cdot 0.2 \implies v_A = 0.5 \text{ m/s}$$

$$v_B = 0 \text{ m/s}$$

d) Como el choque es elástico en el mismo se conservan tanto el momento lineal total del sistema como la energía cinética del sistema. Por lo tanto, como las masas de ambos cuerpos son iguales,

$$\begin{cases} v_A + v_B = v'_A + v'_B \\ v_A^2 + v_B^2 = v'^2_A + v'^2_B \end{cases} \implies \begin{cases} v_A = v'_A + v'_B \implies v'_A = v_A - v'_B \\ v_A^2 = v'^2_A + v'^2_B \end{cases} \implies$$

$$v_A^2 = v'^2_A + v'^2_B - 2v_A v'_B + v'^2_B \implies 2v'_B (v'_B - v_A) = 0 \implies v'_B = v_A = 0.5 \text{ m/s}$$

$$\text{Y por lo tanto, como } v'_A = v_A - v'_B \implies v'_A = v_A - v_A \implies v'_A = 0 \text{ m/s}$$

Es decir, ambos bloques intercambian sus velocidades justo tras el choque.

e) Tras el primer choque, el bloque A se mueve con la misma aceleración constante $g/4$, y el bloque B se mueve ahora con velocidad constante $v'_B = 0.5 \text{ m/s}$.

La distancia que recorre cada bloque hasta el segundo choque es la misma $x_A = x_B \implies$

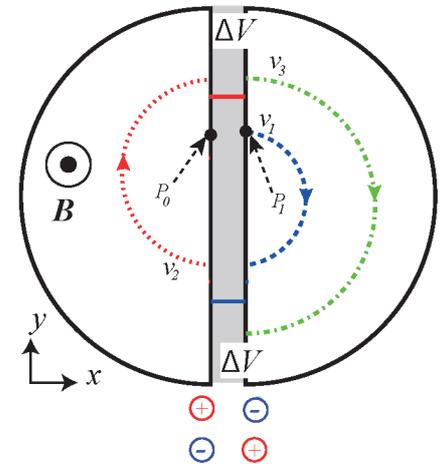
$$\frac{1}{2} a_A t_2^2 = v_B t_2 \implies t_2 = \frac{2v_B}{a_A} = \frac{2v_B \cdot 4}{g} = \frac{2 \cdot 0.5 \cdot 4}{10} \implies t_2 = 0.4$$

$$\text{f) } x_A = x_B = v_B t_2 = 0.5 \cdot 0.4 \implies x_A = x_B = 0.2 \text{ m}$$

P2.- El Ciclotrón.

Un ciclotrón es un acelerador de partículas cargadas (iones) que, por medio de un proceso de aceleración múltiple, permite que los iones alcancen elevadas velocidades sin el empleo de altos voltajes. La mayoría de los actuales aceleradores de partículas descienden del primer ciclotrón de protones construido por E.O. Lawrence y M.S. Livingstone en Berkeley (California) en los años treinta del siglo XX. Veamos cómo funciona.

En esencia, un ciclotrón consta de dos placas semicirculares huecas que reciben el nombre de D y que se montan según la Figura 1, con sus bordes diametralmente opuestos. Las dos D es están dentro de un campo magnético uniforme \mathbf{B} que es perpendicular al plano de las D es. Supongamos que las placas del ciclotrón están colocadas en el plano x - y (ver la Figura 1) y que una partícula de carga q y masa m penetra por el punto P_1 con una cierta velocidad v_1 en la D derecha del ciclotrón. Como sabemos, el campo magnético \mathbf{B} someterá al ion a una fuerza \mathbf{F} y el ion describirá una trayectoria semicircular (trayectoria azul) dentro de la D derecha.



- Determinar el radio de dicha trayectoria semicircular en función de q , m , v_1 y B .
- Determinar el periodo τ que tendría la trayectoria circular completa en función de q , m , v_1 y B .

Supongamos que el ion recorre esa primera media vuelta y que, al llegar a la región entre las placas (región de color gris en el dibujo), una diferencia de potencial ΔV lo acelera (ver dibujo). De la D de la derecha, pasará a la D de la izquierda con una nueva velocidad $v_2 > v_1$. El ion recorrerá media vuelta (trayectoria de color rojo), y cuando tras un cierto tiempo llega de nuevo a la región gris entre las D es, la diferencia de potencial ΔV entre placas ha cambiado su polaridad de modo que vuelve a acelerar la carga. De esta forma, la carga pasa a la D de la derecha con una nueva velocidad $v_3 > v_2$.

Si este proceso se repite múltiples veces, las cargas, al aumentar su velocidad en cada semiperiodo, acaban alcanzando velocidades finales muy grandes. Por supuesto, el mayor problema técnico en el diseño del ciclotrón radica en sincronizar el movimiento de las cargas en las D es con el cambio en la polaridad del potencial entre ellas.

Supongamos que las cargas que se inyectan en el ciclotrón son protones cuya masa y carga son, respectivamente, $m_p \approx 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ y $q_p \approx 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$. Suponer además que son inyectados por el punto P_0 (ver Figura 1) con velocidad despreciable. La diferencia de potencial entre las D es es de $\Delta V = 10000$ voltios.

- Determinar la velocidad v_1 de los protones al penetrar por primera vez en la D de la derecha, es decir, al llegar al punto P_1 de la Figura 1.
- Despreciando efectos relativistas, determinar el número de veces mínimo que los protones deben ser acelerados para que alcancen una velocidad final que sea mayor que $c/100$, siendo $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ la velocidad de la luz. Es decir, el mínimo número de veces que deben cruzar la región entre las D es para alcanzar esa velocidad.
- Determinar el radio de la trayectoria final cuando ha cruzado ese número mínimo de veces sabiendo que el campo magnético \mathbf{B} tiene una intensidad de $B = 10^{-2} \text{ T}$.

Problema P2: Solución

- a) La carga q está sometida a la fuerza de Lorentz que ejerce el campo magnético B :

$$\mathbf{F} = q \mathbf{v}_1 \times \mathbf{B} = m \mathbf{a}.$$

Como el campo y la velocidad son perpendiculares entre sí, pasamos a módulos:

$$F = q v_1 B = m a = m \frac{v_1^2}{R_1}.$$

De la expresión anterior, despejamos el radio R_1 de la primera trayectoria semicircular:

$$R_1 = \frac{mv_1}{qB}$$

- b) Para el periodo τ usamos la misma expresión poniendo $v_1 = wR_1$, siendo w la velocidad angular (frecuencia angular). Como $w = 2\pi/\tau$, tendremos que:

$$\tau = \frac{2\pi m}{qB}$$

- c) Si por P_0 los protones tienen velocidad cero, la velocidad v_1 con que penetran por primera vez en la D de la derecha se calcula a partir del principio de conservación de la energía:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = q\Delta V, \quad \rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}}$$

- d) Cuando un protón pasa por primera vez de la D izquierda a la D derecha $v_1 = \sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}}$. Cuando pasa por segunda vez por la zona de aceleración, aplicamos el principio de conservación de la energía:

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + q\Delta V, \quad \rightarrow v_2^2 = v_1^2 + \frac{2q\Delta V}{m} = 2v_1^2$$

Cuando pasa por tercera vez por la zona de aceleración, aplicamos de nuevo el principio de conservación de la energía:

$$\frac{1}{2}mv_3^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + q\Delta V, \quad \rightarrow v_3^2 = v_2^2 + \frac{2q\Delta V}{m} = 3v_1^2$$

De este modo, cuando pase por n -enésima vez por la zona de aceleración tendremos:

$$v_n^2 = v_{n-1}^2 + \frac{2q\Delta V}{m} = nv_1^2$$

Si queremos que v_n sea $v_n = c/100$: $v_n^2 = \frac{c^2}{10^4} = nv_1^2$

Sustituyendo los valores de m , q y ΔV , llegamos a que $n \approx 4.7$, luego tiene que cruzar 5 veces.

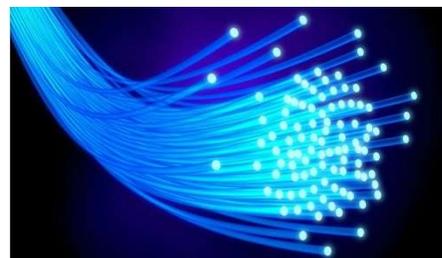
- e) Cuando cruza cinco veces ($n = 5$), $v_5^2 = 5v_1^2$, luego:

$$R_5 = \frac{mv_5}{qB} = \frac{\sqrt{5} m v_1}{qB}.$$

Sustituyendo los valores de m , q , B y v_1 se llega a que $R_5 \approx 3.2$ m

P3.- Ángulo de aceptación de una fibra óptica.

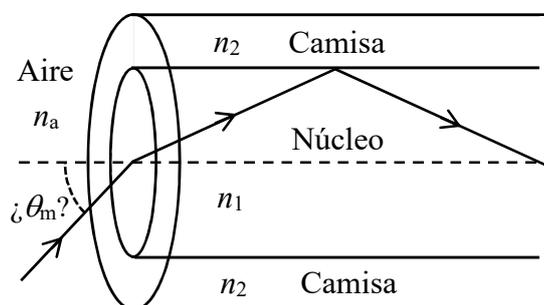
Una fibra óptica es un dispositivo tecnológico que sirve para propagar rayos de luz de forma confinada desde un punto hasta otro. Sus aplicaciones prácticas son variadas: como la transmisión de información, la inspección de lugares de difícil acceso en medicina o industria, o la simple iluminación decorativa. Como sabemos, actualmente la fibra óptica está llegando a los hogares como nuevo medio de conexión a Internet.



La estructura básica de una fibra óptica está formada por dos capas cilíndricas concéntricas. La parte más interna es un **núcleo** de un material transparente. Por este núcleo se propagan de forma confinada los rayos de luz. Alrededor de este núcleo hay una **camisa o revestimiento** de material también transparente, pero con un índice de refracción ligeramente menor que el índice de refracción del material del núcleo. Estas dos capas, a su vez, están recubiertas por una funda de material protector.

Los rayos de luz que se propagan por el núcleo de la fibra permanecen confinados en el mismo debido al fenómeno de la reflexión interna total que se puede producir en la interfaz entre el núcleo y la camisa que lo envuelve.

Consideremos una fibra óptica por la que queremos se propague un rayo de luz monocromática. Para la longitud de onda de ese rayo, el índice de refracción del núcleo es $n_1 = 1.55$, y el índice de refracción de la camisa es $n_2 = 1.45$.



- a) Calcular el ángulo de incidencia máximo θ_m que puede tener un rayo de luz incidente en el extremo de la fibra óptica para que se propague por el núcleo de la fibra sin sufrir pérdidas por la camisa. Tomar el valor del índice de refracción del aire como $n_a = 1$.

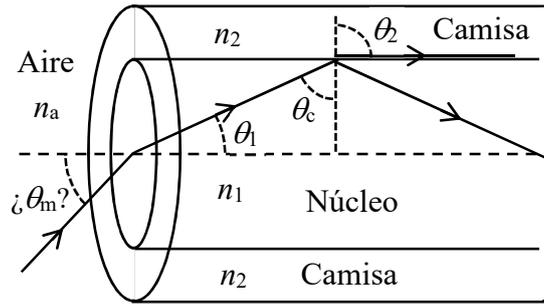
Al ángulo θ_m calculado en el apartado anterior se le denomina **ángulo de aceptación** de la fibra. Y al cono generado por dicho ángulo alrededor del eje de la fibra, se le denomina **cono de aceptación**.

- b) Indicar dos posibles cambios que podrían hacerse en los materiales del núcleo y la camisa de esa fibra óptica para aumentar el valor del ángulo de aceptación de la misma.

Consideremos un tramo recto de esa fibra óptica de longitud $L = 50$ km. Dos rayos de luz penetran por un extremo de la fibra. Uno de ellos penetra en la fibra en dirección paralela al eje de la misma. El otro rayo penetra con el ángulo de aceptación θ_m calculado en el apartado a).

- c) Calcular la diferencia entre los tiempos que tarda cada rayo en recorrer la fibra óptica y salir por el otro extremo. Dato: velocidad de propagación de la luz en el aire $c = 3 \times 10^8$ m/s.

Problema P3: Solución



a) Ley de Snell en la interfaz núcleo-camisa para un rayo con ángulo de incidencia crítico θ_c :

$$n_1 \sen \theta_c = n_2 \sen \theta_2 \quad \text{en este caso } \theta_2 = 90^\circ \quad \implies \quad \sen \theta_c = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\sen \theta_c = 0.9355 \quad \implies \quad \theta_c = 69.3^\circ$$

Ley de Snell en la interfaz aire-núcleo para ese mismo rayo:

$$n_a \sen \theta_a = n_1 \sen \theta_1 \quad \text{en este caso } \theta_a = \theta_m \quad \text{y} \quad \theta_1 + \theta_c = 90^\circ \quad \implies \theta_1 = 90^\circ - \theta_c$$

$$n_a \sen \theta_m = n_1 \cos \theta_c \quad \implies \quad \sen \theta_m = \frac{n_1}{n_a} \cos \theta_c = \frac{n_1}{n_a} \sqrt{1 - \sen^2 \theta_c} = \frac{n_1}{n_a} \sqrt{1 - \frac{n_2^2}{n_1^2}}$$

$$\sen \theta_m = \frac{1}{n_a} \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad \implies \quad \sen \theta_m = 0.5477 \quad \implies \quad \theta_m = 33.2^\circ$$

b) Teniendo en cuenta la ecuación anterior $\sen \theta_m = \frac{1}{n_a} \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$ para aumentar el valor del ángulo

de aceptación de la fibra se podría:

- Usar otro material para el núcleo con un índice de refracción n_1 mayor.
- Usar otro material para la camisa con un índice de refracción n_2 menor.

c) Si v_1 es la velocidad de propagación del laser dentro del núcleo, $n_1 = \frac{c}{v_1} \implies v_1 = \frac{c}{n_1}$

$$\text{Para el rayo que se propaga paralelo a la fibra, } L = v_1 t_p \implies t_p = \frac{L}{v_1} = \frac{L n_1}{c} \implies$$

$$t_p = 2.58 \times 10^{-4} \text{ s}$$

$$\text{Para el rayo que se propaga inclinado, } L_i = v_1 t_i \implies t_i = \frac{L_i}{v_1} = \frac{L_i n_1}{c}$$

Por otra parte, que la relación entre L y L_i es $L = L_i \sen \theta_c$ resulta que:

$$t_i = \frac{L_i n_1}{c} = \frac{L n_1}{c \sen \theta_c} \implies t_i = 2.76 \times 10^{-4} \text{ s.}$$

$$\text{Y, por lo tanto, } \Delta t = t_i - t_p = \frac{L n_1}{c} \left(\frac{1}{\sen \theta_c} - 1 \right) \implies \Delta t = 1.8 \times 10^{-5} \text{ s}$$

P4.- Prueba experimental: Ley de Boyle-Mariotte

La llamada *Ley de Boyle-Mariotte* no es más que la ecuación de estado de los gases ideales cuando la temperatura T se mantiene constante. Esta ley fue enunciada por separado por dos físicos, el británico Robert Boyle en 1662 y el francés Edme Mariotte en 1676. La ecuación de estado de los gases ideales viene dada por:

$$pV = nRT,$$

siendo p la presión del gas, V su volumen, T su temperatura y n el número de moles. R es la constante de los gases ideales cuyo valor es $R=8.314 \text{ J/(mol K)}$. Cuando la temperatura del gas permanece constante, tenemos que

$$pV = nRT = cte.$$

En el montaje experimental de la fotografía un cilindro hermético encierra una cierta cantidad de aire. Mediante un grifo, podemos ir llenando de agua el cilindro de forma que el volumen que ocupa el aire en el cilindro disminuye mientras que su presión aumenta. La presión del aire encerrado en el cilindro podemos medirla mediante un barómetro que hay en la parte superior del cilindro. Bajo condiciones de temperatura y presión no muy altas, por ejemplo a temperatura ambiente y presión cercana a la atmosférica, casi todos los gases, y en particular en aire, se comportan como un gas ideal.

El cilindro transparente del experimento (ver fotografía) para la demostración de la Ley de Boyle-Mariotte tiene una serie de marcas correspondientes a las fracciones $3/10$, $2/5$, $1/2$, $3/5$, $7/10$, y $4/5$ de su volumen total V_0 . Los datos referentes al radio y altura del cilindro son: $r = 0.025 \text{ m}$ y $h = 0.5 \text{ m}$.



Usando este dispositivo, en la siguiente tabla se recoge una serie de valores de presión p medidos experimentalmente para varios valores del volumen V :

V	$0.3V_0$	$0.4V_0$	$0.5V_0$	$0.6V_0$	$0.7V_0$	$0.8V_0$
$p \text{ (bar)}$	3.2	2.4	1.9	1.6	1.35	1.2

Datos: Volumen V de un cilindro: $V = \pi r^2 h$; $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pascales}$.

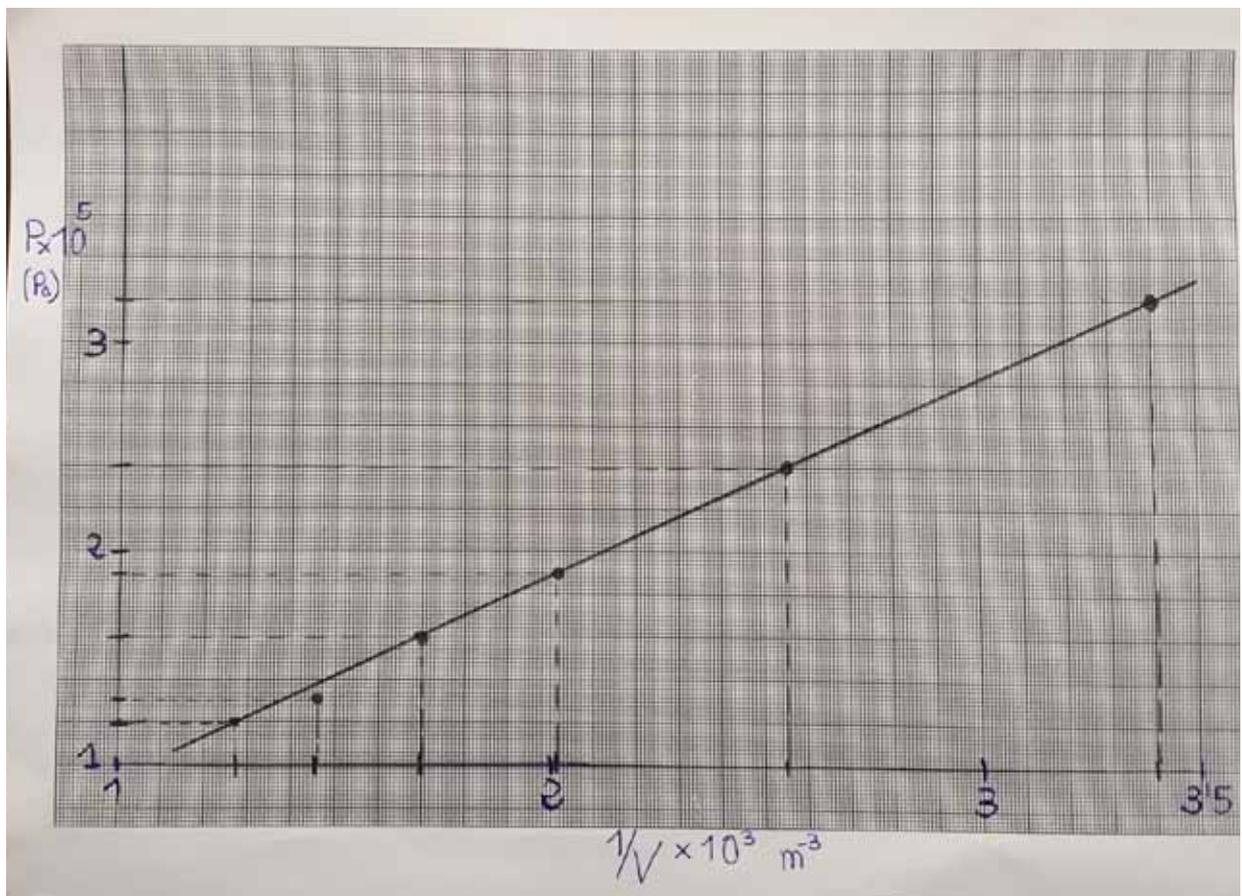
- Calcula en m^3 el volumen V_0 del cilindro y los volúmenes parciales que aparecen en la tabla.
- Representa gráficamente en el papel milimetrado los puntos experimentales de la presión p frente a la inversa del volumen V : $(x, y) = (1/V, p)$.
- Ajusta a una recta los puntos obtenidos en la gráfica anterior.
- A partir de este ajuste, determina el número de moles n de aire encerrados en el cilindro. La temperatura a la que se ha realizado el experimento ha sido de $T=23^\circ\text{C}$. Hay que tener en cuenta que la temperatura debes usarla en Kelvin.

Problema P4: Solución Con los valores de la tabla hacemos los siguientes cálculos:

$$V_0 \text{ (m}^3\text{)} = 0,000981748$$

V (Vo)	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
p (bar)	3,2	2,4	1,9	1,6	1,35	1,2
V (m ³)	2,95E-04	3,93E-04	4,91E-04	5,89E-04	6,87E-04	7,85E-04
1/V	3395,31	2546,48	2037,18	1697,65	1455,13	1273,24
p(Pa)	320000	240000	190000	160000	135000	120000

Representamos gráficamente los seis puntos $(1/V, p)$ y obtenemos la gráfica de la figura. Determinamos la pendiente m de la recta que teóricamente debe pasar por los puntos midiendo la tangente de la recta que de forma más aproximada pasa por los puntos y obtenemos que:



$$m = \tan \theta \approx \frac{(3.2 \times 10^5 - 1.2 \times 10^5) \text{ Pa}}{(3.4 \times 10^3 - 1.3 \times 10^3) \text{ m}^{-3}} \approx 95.24 \text{ J}$$

Tenemos que la pendiente $m = 95.25 = nRT$. Expresando $T = 23^\circ\text{C}$ en kelvin y despejando, se obtiene que $n \approx 0.039$ moles.