

Estudio y representación gráfica de cuencas de atracción de semi-flujos discretos inducidos por funciones racionales complejas

Víctor Álvarez Aparicio

Tutoría: Luis Javier Hernández Paricio y María Teresa Rivas Rodríguez

Resumen

En este trabajo, con carácter introductorio a la investigación, se propone un nuevo método basado en **exponentes de Lyapunov** para estudiar las cuencas de atracción de **semi-flujos discretos** inducidos por la iteración de una función racional compleja. Los algoritmos que componen dicho método han sido implementados en el lenguaje de programación **Julia**, y evitan la aparición de algunos problemas computacionales frecuentes en el software dedicado al Análisis Numérico, como los desbordamientos o las indeterminaciones. También se han empleado técnicas de **programación en paralelo** para reducir el coste computacional de los algoritmos.

Idea central

La idea central del método desarrollado consiste en, a partir de una función racional compleja f , dividir la **esfera de Riemann** $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ en un número finito de regiones, correspondientes a las **cuencas de atracción de los n -ciclos atractores** ($n \in \mathbb{N}$) inducidos por f , y su conjunto de Julia. Para ello, trasladaremos el problema a la **recta proyectiva compleja** $P^1(\mathbb{C})$, representaremos la aplicación racional f a través de su **endomorfismo de Hopf** asociado y definiremos una función que nos ayudará a distinguir las cuencas de atracción y cuyo valor en cada una de ellas guarda una relación estrecha con los **exponentes de Lyapunov** de la función racional f .

Desde el punto de vista computacional

Con el objetivo de evitar los posibles desbordamientos numéricos se ha empleado la noción de **par homogéneo r -irreducible** inducido por una función racional y se han considerado **coordenadas homogéneas** en los puntos de la **recta proyectiva compleja** $P^1(\mathbb{C})$. Asimismo, se han tomado las representaciones irreducibles de las funciones racionales para evitar problemas de indeterminación. También, gracias a la eficiencia de **Julia Language** para cálculo numérico y a las técnicas de **multi-threading** aplicadas en la implementación de los algoritmos, se ha logrado reducir sensiblemente los tiempos de ejecución en comparación con otros algoritmos similares, tal y como se especifica en [1].

La esfera de Riemann

El dominio de nuestras aplicaciones racionales es el **plano de los números complejos ampliado** $\hat{\mathbb{C}}$. También consideramos la **2-esfera usual** S^2 y la **recta proyectiva compleja** $P^1(\mathbb{C})$, definida como el cociente $P^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\} / \sim$, donde $(z, t) \sim (z', t')$ si y solo si $\exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $(z, t) = (\lambda z', \lambda t')$. Podemos construir el siguiente diagrama:

Isomorfismos analíticos

$$\begin{array}{ccc} & \hat{\mathbb{C}} & \\ \gamma \swarrow & & \searrow \theta \\ P^1(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\theta^{-1}\gamma} & S^2 \end{array}$$

donde γ y θ son isomorfismos analíticos.

Nos referiremos a cualquiera de las tres superficies independientemente como la **esfera de Riemann**.

Endomorfismos de Hopf

Representaremos cada función racional a través de un **par homogéneo r -irreducible** R , obtenido a partir de su numerador y su denominador. Consideramos la **3-esfera** $S^3 = \{(z, t) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\} \mid |z| + |t| = 1\}$ y el siguiente diagrama inducido por la **fibración de Hopf** $q : S^3 \rightarrow P^1(\mathbb{C})$:

Construcción de los endomorfismos de Hopf

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\} & \xrightarrow{R} & \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ \downarrow p & & \downarrow p \\ S^3 & \xrightarrow{R^S} & S^3 \\ \downarrow q & & \downarrow q \\ P^1(\mathbb{C}) & \xrightarrow{R^P} & P^1(\mathbb{C}) \end{array}$$

Al par de aplicaciones (R^S, R^P) asociado a la aplicación racional R que hace conmutativo el diagrama anterior lo llamaremos **endomorfismo de Hopf**.

Función de Lyapunov

Sea (X, f) un semi-flujo discreto y $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ una aplicación continua. Definimos la siguiente **función de Lyapunov**:

Función de Lyapunov asociada a ϕ
Sea $L_f(\phi) : X \rightarrow [0, +\infty]$ dada por:

$$L_f(\phi)(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\prod_{k=0}^{n-1} \phi(f^k(x)) \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Esta función es **constante** en cada cuenca de atracción del semi-flujo discreto (X, f) , de modo que la utilizaremos para distinguirlas. Nos referiremos a cada una de estas constantes como **constante de Lyapunov** asociada a cada cuenca.

Tomaremos $X = P^1(\mathbb{C})$, f un **endomorfismo de Hopf** asociado a una aplicación racional, y $\phi = f^\#$ su **derivada esférica**, como puede verse en [1].

Cuencas de atracción inducidas por el método de Newton aplicado sobre el polinomio $q(z) = (z^2 + 1)(z - (1.214 + 0.5895i))$

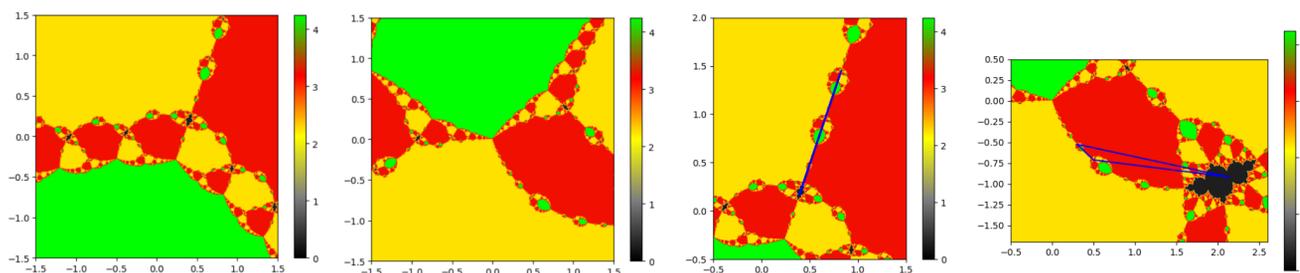


Figura: Entornos del origen y del punto del infinito

Figura: Cuenca de atracción de un 3-ciclo atractor

Figura: QR al código ([2])

Trabajo futuro

- Aplicar estas técnicas para el estudio de distintos **procesos iterativos** como el método de Chebyshev, Halley,...
- Analizar el comportamiento de los **puntos fijos** del endomorfismo de Hopf inducido por una función racional sobre la **3-esfera** S^3 .
- Explorar la conexión del método propuesto con el **Teorema Ergódico**.

Referencias

- [1] V. Álvarez-Aparicio, J.M. García-Calines, L.J. Hernández-Paricio, and M.T. Rivas-Rodríguez. Algorithms for computing basins of attraction associated with a rational self-map of the Hopf fibration based on Lyapunov exponents. *Preprint*, 2022.
- [2] V. Álvarez-Aparicio. Lyapunov Cycle Detector (LCD.jl), 3 2022.

Grado en Matemáticas
Facultad de Ciencia y Tecnología

Real
Sociedad
Matemática
Española



UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA



www.unirioja.es