Álgebras de Lie con retículo de ideales en cadena

Iván Pérez-Aradros Martínez

Tutor: María del Pilar Benito Clavijo

Resumen. En este trabajo nos centramos en álgebras de Lie que tienen un número finito de ideales. Usando teoría de representación del álgebra de Lie simple $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ hemos desarrollado un algoritmo computacional que nos permite construir álgebras de Lie no resolubles cuyo retículo de ideales es una t-cadena con $t = 3, 4, 5$. El algoritmo está basado en resultados de estructura de álgebras de Lie y en resultados clásicos de teoría de representación del álgebra de Lie simple clásica $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ de dimensión 3. Gracias a la generación de ejemplos mediante el algoritmo profundizamos en la estructura y clasificación de esta clase de álgebras.

1. Introducción y palabras clave

En la estructura de cualquier álgebra de Lie la teoría de representación de las álgebras de Lie simples juega un papel muy importante debido al Teorema de Levi. Antes de presentar este resultado necesitamos algunos conceptos clave.

Un álgebra de Lie L es un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ dotada con un producto binario antisimétrico $[x, y]$ que satisface la identidad de Jacobi:

$$[[x, y], z] + [[z, x], y] + [[y, z], x] = 0 \quad \forall x, y, z \in L.$$

Cuando la serie $L^{(1)} = L$ y $L^{(n)} = [L^{(n-1)}, L^{(n-1)}]$, $\forall n > 1$ se anula, L se dice resoluble. EL radical resoluble $R(L) = R$ es el ideal resoluble más grande de L.
Cuando la serie $L^1 = L$ y $L^n = [L, L^{n-1}]$, $\forall n > 1$ se anula, L se dice nilpotente. El radical nilpotente $N(L) = N$ es el ideal nilpotente más grande de L.
Un álgebra de Lie S es semisimple si su radical es trivial, $R(S) = 0$.

Teorema de Levi. En característica cero, toda álgebra de Lie L de dimensión finita descompone como $L = S \oplus R(L)$ con S una subálgebra semisimple.

Una representación de un álgebra de Lie L sobre un espacio vectorial V es un homomorfismo de álgebras de Lie $\rho : L \to \mathfrak{gl}(V)$ con $\mathfrak{gl}(V)$ álgebra general lineal. En este caso, V se dice L-módulo. Algunas de las representaciones que usaremos son la suma directa y el producto tensor, $V \oplus W$ y $V \otimes W$, antisimétricos dos y tres, $\Lambda^2 V$ y $\Lambda^3 V$ siendo V y W representaciones básicas. En lo que sigue todos los espacios vectoriales serán finito-dimensionales y definidos sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ de característica cero.

2. Resultados de Teoría y Herramientas

La construcción de álgebras de Lie con un número finito de ideales se basa en los dos siguientes resultados de estructura.

Teorema S *(Snobl, 2010)* Sea L un álgebra de Lie con producto $[x, y]$, radical nilpotente N con índice de nilpotencia $t + 1$ y descomposición de Levi no trivial $L = S \oplus N$ para algún álgebra de Lie semisimple S. Existe una descomposición de N en suma directa de S-módulos $N = m_1 \oplus m_2 \oplus \cdots \oplus m_t$ donde $N^j = m_2 \oplus N^{j+1}$, $m_j \subseteq [m_{j-1}, m_j]$ tal que m_1 es un S-module fiel y para $2 \leq j \leq t$, m_j descompone en suma directa de un conjunto de componentes irreducibles de la representación del producto tensor $m_1 \otimes m_{j-1}$.

Teorema B *(Benito, 1992)* Sea L un álgebra de Lie no resoluble sobre un cuerpo de característica cero. Los ideales de L forman una cadena de ideales si y solo si L es un álgebra simple o es la suma semidirecta de un ideal nilpotente N distinto de cero y un álgebra simple S tal que N/N^2 es un S-módulo fiel y $Z_i(N)/Z_{i-1}(N)$ son S-módulos irreducibles a través de la representación adjunta. Además, en este caso, los términos de la serie central descendente de N coinciden con los términos de la serie central ascendente y, si $t+1$ es el índice de nilpotencia de N, los ideales de L son los $t + 2$ ideales: $0 < N^t < \cdots < N^i < \cdots < N < L$.

Teoría de representación de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$. Para cada $d \geq 0$ denotaremos por $V_d = span < x^d, x^{d-1}y, ..., xy^{d-1}, y^d >$ al conjunto de polinomios homogéneos de grado d en las indeterminadas x e y. El subespacio V_d puede ser visto como una $\mathfrak{sl}_2$-representación irreducible dada por la subálgebra de derivaciones $span < x\frac{\partial}{\partial y}, y\frac{\partial}{\partial x}, x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y} > \subseteq Der[x, y]$. Esta es una de las presentaciones del álgebra de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$. La fórmula de Glebsch-Gordan nos da una descomposición natural del producto tensor de dos $\mathfrak{sl}_2$-representaciones en la forma:

$$V_n \otimes_k V_m \cong V_{n+m} \oplus V_{n+m-2} \oplus V_{n+m-4} \ldots \oplus V_{n-m}, \qquad n \geq m.$$

Se define la k-transvección $(\cdot, \cdot)_k : V_n \times V_m \to V_{n+m-2k}$ como

$$(f, g)_k = \frac{(m-k)!}{m!}\frac{(n-k)!}{n!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}\frac{\partial^k f}{\partial x^{k-i}\partial y^i}\frac{\partial^k g}{\partial x^i \partial y^{k-i}}$$

La identidad de Gordan, herramienta indispensable en el TFG, ofrece una relación entre transvecciones.

3. Resultados de estructura del TFG

Apoyándonos en los teoremas y herramientas descritos en la Sección 2 y en la construcción de ejemplos mediante el programa implementado en Mathematica a través del algoritmo computacional, llegamos a los resultados centrales del TFG que aparecen en las secciones 2.1 (generales) y 2.3 (particulares) de la memoria. De entre ellos destacamos:

Teorema 1. El e.v. $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F}) \oplus V(n) \oplus V(2n-k) \oplus V(3n-2k-2r)$ es un álgebra de Lie para todo entero n usando como productos $p_{112} = \alpha(\cdot\ ,\ \cdot)_k$ y $p_{123} = \beta(\cdot\ ,\ \cdot)_r$ si $(k, r) = (1, 0), (1, 1), (1, 3), (3, 1)$.

Teorema 2. El e.v. $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F}) \oplus V(n) \oplus V(2n-2k) \oplus V(3n-2k-2r)$ no es álgebra de Lie para cualquier entero n si usamos como productos $p_{112} = \alpha(\cdot\ ,\ \cdot)_k$ y $p_{123} = \beta(\cdot\ ,\ \cdot)_r$ salvo que $\alpha\beta = 0$ y valores de $(k, r) = (1, 2), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (3, 0), (3, 2)$. Además, si n par, para $(k, r) = (n-1, 0), (n-1, 1), (n-1, 2)$ y si n impar, para $(k, r) = (n, 0)$, L tampoco es de Lie.

Las álgebras de Lie cuyo retículo de ideales es una 5-cadena y tienen factor de Levi $L/R(L) \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ tienen radical resoluble nilpotente

$$R(L) = N(L) = N = V(n) \oplus V(2n-k) \oplus V(3n-2k-2r)$$

tal que $N/N^2 \cong V(n)$ con $n \geq 1$. El Teorema 2.1.7 de la Sección 2.1 del TFG proporciona una construcción explícita. Los Teoremas 1 y 2 previos son la clave de la clasificación que presentamos en la siguiente Sección 4.

4. Álgebras no resolubles con t-cadena ideales $t = 3, 4, 5$

Para $t = 3$ es fácil probar que este tipo de álgebras son extensiones escindidas nulas de un álgebra simple y un módulo irreducible. Para $t = 4$ se caracterizan en 1992 y se clasifican en el caso de que el factor de Levi sea $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$. Esta última restricción llevada al caso $t = 5$ y $n \leq 6$ conduce a la clasificación de la Sección 2.3.2 de la memoria que aparece en la siguiente tabla.

n	$V(s)$	$\Lambda^3 V(n)$	$V(n) \otimes V(s)$	Cadena de ideales propios	(k, r)
1	$V(0)$	0	$V(1)$	$V(1)$ — $V(0)$ — $V(1)$	$(1, 0)$
2	$V(2)$	$V(0)$	$V(4) \oplus V(2) \oplus V(0)$	$V(2)$ — $V(2)$ — $V(4)$	$(1, 0)$
				$V(2)$ — $V(2)$ — $V(2)$	$(1, 1)$
3	$V(4)$	$V(3)$	$V(7) \oplus V(5) \oplus V(3) \oplus V(1)$	$V(3)$ — $V(4)$ — $V(7)$	$(1, 0)$
				$V(3)$ — $V(4)$ — $V(5)$	$(1, 1)$
				$V(3)$ — $V(4)$ — $V(1)$	$(1, 3)$
	$V(0)$		$V(3)$	No posible	-
4	$V(6)$	$V(2) \oplus V(6)$	$V(10) \oplus V(8) \cdots \oplus V(2)$	$V(4)$ — $V(6)$ — $V(10)$	$(1, 0)$
				$V(4)$ — $V(6)$ — $V(8)$	$(1, 1)$
				$V(4)$ — $V(6)$ — $V(4)$	$(1, 3)$
	$V(2)$		$V(6) \oplus V(4) \oplus V(2)$	$V(4)$ — $V(2)$ — $V(4)$	$(3, 1)$
5	$V(8)$	$V(9) \oplus V(5) \oplus V(3)$	$V(13) \oplus V(11) \cdots \oplus V(3)$	$V(5)$ — $V(8)$ — $V(13)$	$(1, 0)$
				$V(5)$ — $V(8)$ — $V(11)$	$(1, 1)$
				$V(5)$ — $V(8)$ — $V(7)$	$(1, 3)$
	$V(4)$		$V(9) \oplus V(7) \cdots \oplus V(1)$	$V(5)$ — $V(4)$ — $V(7)$	$(3, 1)$
				$V(5)$ — $V(4)$ — $V(1)$	$(3, 4)$
	$V(0)$		$V(5)$	No posible	-
6	$V(10)$	$V(12) \oplus V(8) \oplus V(6) \oplus V(4) \oplus V(0)$	$V(16) \oplus V(14) \cdots \oplus V(4)$	$V(6)$ — $V(10)$ — $V(16)$	$(1, 0)$
				$V(6)$ — $V(10)$ — $V(14)$	$(1, 1)$
				$V(6)$ — $V(10)$ — $V(10)$	$(1, 3)$
	$V(6)$		$V(12) \oplus V(10) \cdots \oplus V(0)$	$V(6)$ — $V(6)$ — $V(10)$	$(3, 1)$
				$V(6)$ — $V(6)$ — $V(2)$	$(3, 5)$
	$V(2)$		$V(8) \oplus V(6) \oplus V(4)$	No posible	-