Álgebras de Lie. Estructura y contrucciones

Laura Soria García

Tutor: María del Pilar Benito Clavijo

Resumen. En 1992, P.Turkowski clasifica las álgebras de Lie reales 9-*dimensionales* e indescomponibles que admiten un factor de Levi no trivial. La descripción de tales álgebras,se hace mediante: constantes de estructura, la previa clasificación de álgebras resolubles de dimensión 6 dada por G.M. Mubarakazyanov en 1963 y la teoría de representación de las álgebras simples reales 3-*dimensionales*, $\mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$ y $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$. Este tipo de construcciones responden a un esquema más general $\mathcal{L} = M \oplus_\rho R$ donde M y R son álgebras de Lie y $\rho : M \to \mathfrak{gl}(R)$ una representación tal que $\rho(M) \subseteq DerR$.Esta última condición equivale a decir que el conjunto imagen $\rho(M)$ de la representación está formada por transformaciones lineales $\rho_x : R \to R$, que son derivaciones del producto interno $r \cdot r'$ de R, esto es: $\rho_x(r \cdot r') = \rho_x(r) \cdot r' + r \cdot \rho_x(r')$. El objetivo es explicar este tipo de construcciones y aplicarlas para recuperar la clasificación de Turkowski.

1. Elementos básicos del TFG

El punto de partida que explica la clasificación dada por P. Turkowski está en el siguiente resultado.

Teorema de Levi, 1905. Dada L un álgebra de Lie finito dimensional sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ de característica cero, existe una subálgebra S semisimple, llamada factor de Levi, tal que $L = S \oplus R(L)$, donde $R(L)$ es el radical resoluble de L.

Los **conceptos claves** del *Teorema de Levi* son:

- L una $\mathbb{F}$-álgebra de Lie junto con un producto binario $[x, y]$, llamado corchete de Lie, que cumple la propiedad $[x, x] = 0\, \forall x \in L$ y la identidad de Jacobi en la que $\forall x, y, z \in L$ tenemos que $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$.
- $R(L) = R$ radical resoluble: ideal más grande que cumple que $R^{(k)} = 0$ para algún $k \geq 1$ donde $R^{(1)} = R$ y $R^{(i+1)} = [R^{(i)}, R^{(i)}]$.
- S es un álgebra de Lie semisimple, es decir, su radical es trivial $R(S) = 0$.

La **llave de la clasificación** está en la Teoría de represetación de álgebras de Lie, que permite construir nuevas álgebras usando la construcción $\mathcal{L}_\rho(M, R) = M \oplus_\rho R$.

Definición. *Una representación de un álgebra de Lie L sobre un espacio vectorial V, es un homomorfismo de álgebras de Lie $\rho : L \to End(V)^-$. Donde $End(V)^-$ es el álgebra de Lie de los endomorfismos de V con producto binario $[f, g] = f \circ g - g \circ f$.*

La construcción $\mathcal{L}_\rho(M, R)$: para cualquier terna (M, R, ρ) donde M y R son álgebras de Lie arbitrarias con productos internos $\langle m, m'\rangle\ \forall m, m' \in M$ y $r \cdot r'\ \forall r, r' \in R$ y $\rho : M \to \mathfrak{gl}(R)$ una representación, entonces sobre el espacio vectorial $\mathcal{L}_\rho(M, R) = M \oplus_\rho R$ se puede definir el producto binario:

$$[m + r, m' + r']_\rho = \langle m, m'\rangle + \rho(m)(r') - \rho(m')(r) + r \cdot r'.$$

Además, $\mathcal{L}_\rho(M, R)$ con el producto $[a, b]_\rho$ es álgebra de Lie si y solo si $\rho(M) \subseteq Der\,R$, donde $Der\,R = \{d : R \to R | d(xy) = (dx)y + xd(y)\}$ es el álgebra de derivaciones de R.

Las álgebras que aparecen en la clasificación son de la forma $L_\rho(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}), V)$ o $L_\rho(\mathfrak{so}_3(\mathbb{R}), W)$ donde $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ y $\mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$ son, salvo isomorfismo, las únicas álgebras simples reales 3-*dimensionales* y V, W son álgebras de Lie 6-*dimensionales*.

2. La construcción $L_\rho(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F}), V(d))$

La forma más sencilla de introducir el álgebra $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ es el conjunto de transformaciones lineales de traza cero sobre un espacio vectorial 2-*dimensional*. En el TFG usamos una descripción natural alternativa para $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ que, gracias a los resultados obtenidos por J. Dixmier en 1984, es más efectiva en la descripción de construcciones en las que interviene este álgebra. Siguiendo a J. Dixmier, se puede describir como subálgebra de derivaciones del álgebra de polinomios $\mathbb{F}[X, Y]$,

$$\langle x_1 = X\tfrac{\partial}{\partial Y}, x_2 = Y\tfrac{\partial}{\partial X}, x_3 = X\tfrac{\partial}{\partial X} - Y\tfrac{\partial}{\partial Y}\rangle$$

.

Con productos no nulos: $[x_1, x_2] = 2x_2$, $[x_1, x_3] = -2x_3$, $[x_2, x_3] = x_1$. Las representaciones irreducibles de este álgebra, se pueden ver como espacios vectoriales $V(d) = span_{\mathbb{F}}\langle X^d, X^{d-1}Y, \ldots, XY^{d-1}, Y^d\rangle$ con $d \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. La acción $\rho_d : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F}) \to \mathfrak{gl}(V(d))$ es la natural por derivaciones parciales y nos la proporciona el siguiente grafo:

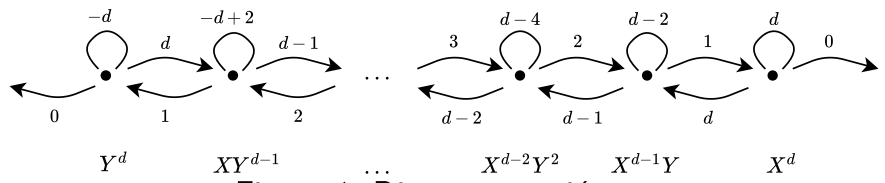

Figura 1. Diagrama acción ρ_d

Las flechas hacia la izquierda marcan la acción de x_2 y sus correspondientes pesos, hacia la derecha la acción de x_1 y las flechas que vuelven al mismo nodo, marcan la acción escalar de x_3. En la clasificación necesitamos la representación de $V(d)$ para $0 \leq d \leq 5$.

3. Resultados de estructura del TFG

Los siguientes resultados de estructura general sobre álgebras de Lie desarrollada en la Sección 1.4 del TFG, son fundamentales para elaborar una demostración rigurosa que conduce a la clasificación de Turkowski.

Proposición 1.4.1

Sea L un álgebra de Lie no resoluble, S un factor de Levi, $\rho : S \to \mathfrak{gl}(L)$ la representación adjunta y $L_0 = \{x \in L : [S, x] = 0\} = C_L(S)$. Entonces:

a) $\rho(S) \subseteq Der\,L$ y S, $R(L)$ y $N(L)$ son submódulos de L.
b) $L = L_1 \oplus L_0$ donde L_0 es el submódulo suma de todos los submódulos 1-*dimensionales* de L y L_1 es el submódulo suma de todos los módulos no triviales de L.
c) Para todo $x \in L_0$, tenemos que $ad_L\, x \in Hom_S(L, L)$, $ad_{R(L)}\, x \in Hom_S(R(L), R(L))$ y $ad_{N(L)}\, x \in Hom_S(N(L), N(L))$.
d) Si V es un S-*submódulo* irreducible de L, $x \in L_0$ y $ad_L(x)(V) = [x, V] = \{[x, v] : v \in V\} \neq 0$, el subespacio $[x, V]$ es un submódulo irreducible isomorfo con V.
e) L_0 es una subálgebra de L y $[L_0, L_1] \subseteq L_1$.

Proposición 1.4.2

Sea L un álgebra de Lie indescomponible, no resoluble y no simple, S un factor de Levi y $\rho : S \to \mathfrak{gl}(L)$ la representación adjunta. Si $R(L)_0 = R(L) \cap L_0$ y $N(L)_0 = N(L) \cap L_0$, entonces:

a) ρ es representación fiel, luego $C_S(L) = \{x \in S : [x, L] = 0\} = 0$.
b) $R(L)_0$ es una subálgebra del radical resoluble y contiene a $N(L)_0$. Además, $[R(L)_0, R(L)_0] \subseteq N(L)_0$.
c) Si el radical resoluble $R(L)$ es abeliano, $R(L)_0 = 0$.
d) Cualquier submódulo que sea un complemento del nilradical en el radical resoluble está contenido en L_0. Esto es, $R(L) = N(L) \oplus T$ y T es un submódulo, entonces $T \subseteq R(L)_0$.

Aplicación del TFG

- Turkowski en 1992 concluye que salvo isomorfismos hay exactamtente 63 álgebras de Lie 9-*dimensionales* indescomponibles (algunas son familias dependientes de uno o dos parámetros), no resolubles y no semisimples sobre el cuerpo real $\mathbb{R}$. Los factores de Levi de tales álgebras son 3-*dimensionales* y simples. En el caso complejo la única posibilidad es $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$; en el caso real tenemos $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ y el álgebra ortogonal $\mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$. Desde un punto de vista técnico Turkowski llega a la clasificación usando las clasificaciones previas de álgebras resolubles de dimensión 6 dadas por G.M. Mubarakzyanov en 1963 y representaciones de baja dimensión de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ y $\mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$. En el artículo, las álgebras aparecen descritas en tablas mediante sus constantes de estructura C_{ij}^k y sin explicitar ningún cálculo.
- Las álgebras de la clasificación de Turkowski se pueden obtener usando la construcción $\mathcal{L}_\rho(M, R)$ descrita en la Sección 1 donde $M = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ ó $\mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$. En el caso $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$, las representaciones explicadas en la Sección 2 permiten extender la clasificación de Turkowski a cualquier cuerpo $\mathbb{F}$ de característica cero.
- Las siguientes tablas comparan la clasificación de Turkowski por constantes de estructura reales y la obtenida por nosotros sobre cuerpos generales. En estos casos las álgebras clasificadas tienen los siguientes productos en común; entre el álgebra semisimple $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$: $[x_1, x_2] = 2x_2$, $[x_1, x_3] = -2x_3$, $[x_2, x_3] = x_1$. Para los productos de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ y el módulo $R(L)$, usamos la Figura 1. La comparación entre ambas clasificaciones se establece dependiendo de la descomposición en módulos irreducibles del radical, como se muestra a continuación:

$R(L)$ sin módulos triviales

P. Turkowski, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$		Clasificación revisada, $\mathbb{F}$ arbitrario	$R(L)$
	$L_{9,59}$		$V(5)$
	$L_{9,60}$		$V(3) \oplus V(1)$
	$L_{9,61}$		$2V(2)$
$C_{45}^7 = 2,\ C_{46}^8 = 1,\ C_{56}^9 = 2$	$L_{9,62}$	$[x_4, x_5] = \frac{\alpha}{2}x_7,\ [x_4, x_6] = \alpha x_8,\ [x_5, x_6] = \frac{\alpha}{2}x_9$	$2V(2)$
	$L_{9,63}$		$3V(1)$

$R(L)$ con tres módulos triviales

P. Turkowski, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$		Clasificación revisada, $\mathbb{F}$ arbitrario	$R(L)$
$C_{49}^4 = 1,\ C_{59}^5 = 1,\ C_{69}^6 = 1$ $C_{79}^7 = p,\ C_{89}^8 = q$	$L_{9,32}^{pq}$ $pq \neq 0$	$[x_4, x_9] = x_4,\ [x_5, x_9] = x_5,\ [x_6, x_9] = x_6$ $[x_7, x_9] = px_7,\ [x_8, x_9] = qx_8$	$V(1) \oplus 3V(0)$
$C_{49}^4 = 1,\ C_{59}^5 = 1,\ C_{69}^6 = 1$ $C_{79}^7 = p,\ C_{89}^7 = 1,\ C_{89}^8 = p$	$L_{9,33}^{p}$ $p \neq 0$	$[x_4, x_9] = x_4,\ [x_5, x_9] = x_5,\ [x_6, x_9] = x_6$ $[x_7, x_9] = px_7,\ [x_8, x_9] = x_7 + px_8$	$V(1) \oplus 3V(0)$
$C_{49}^4 = p,\ C_{59}^5 = p,\ C_{69}^6 = p$ $C_{79}^7 = q,\ C_{79}^8 = -1,\ C_{89}^7 = 1,\ C_{89}^8 = q$	$L_{9,34}^{pq}$ $p \neq 0,\ q \geq 0$	$[x_4, x_9] = px_4,\ [x_5, x_9] = px_5,\ [x_6, x_9] = px_6$ $[x_7, x_9] = qx_7 - x_8,\ [x_8, x_9] = x_7 + qx_8$	$V(1) \oplus 3V(0)$

$R(L)$ con un módulo trivial

P. Turkowski, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$		Clasificación revisada, $\mathbb{F}$ arbitrario	$R(L)$
$C_{49}^4 = 1,\ C_{59}^5,\ C_{69}^6 = 1$ $C_{79}^7 = 1,\ C_{89}^8 = 1$	$L_{9,55}$	$[x_4, x_9] = x_4,\ [x_5, x_9] = x_5,\ [x_6, x_9] = x_6$ $[x_7, x_9] = x_7,\ [x_8, x_9] = x_8$	$V(4) \oplus V(0)$
$C_{49}^4 = 1,\ C_{59}^5,\ C_{69}^6 = 1$ $C_{79}^7 =^p,\ C_{89}^8 = p$	$L_{9,56}^p$	$[x_4, x_9] = x_4,\ [x_5, x_9] = x_5,\ [x_6, x_9] = x_6$ $[x_7, x_9] = px_9,\ [x_8, x_9] = px_8$	$V(2) \oplus V(1) \oplus V(0)$
$C_{79}^7 = 1,\ C_{89}^8 = 1$	$L_{9,57}$	$[x_7, x_9] = x_9,\ [x_8, x_9] = x_8$	$V(2) \oplus V(1) \oplus V(0)$
$C_{78}^9 = 1$	$L_{9,58}$	$[x_7, x_8] = x_9$	$V(2) \oplus V(1) \oplus V(0)$

$R(L) = pV(0) \oplus qV(1) \oplus rV(2)$ con $p \neq 0, 1, 3$ y $p + 2q + 3r = 6$

Con este radical la descomposición del álgebra L como $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$-*módulo* es: $L = pV(0) \oplus qV(1) \oplus (r + 1)V(2)$. Este tipo de álgebras de Lie aparecen descritas en 1976 por B.N. Allison de una forma general. Los casos que aparecen en la clasificación de Turkowski están relacionados, de acuerdo con los resultados de Allison, con construcciones de álgebras de Lie proporcionadas por álgebras ternarias $\mathfrak{J}(J, V)$, inducidas por un álgebra de Jordan J, con identidad de dimensión 1 ó 2 y un módulo V de dimensión ≤ 3. En el caso particular $V = \{0\}$ aparece la conocida construcción de Kantor-Tils-Koecher de mediados de los años 60.

Grado en Matemáticas

Facultad de Ciencias, Estudios Agroalimentarios e Informática

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Real Sociedad Matemática Española

www.unirioja.es