

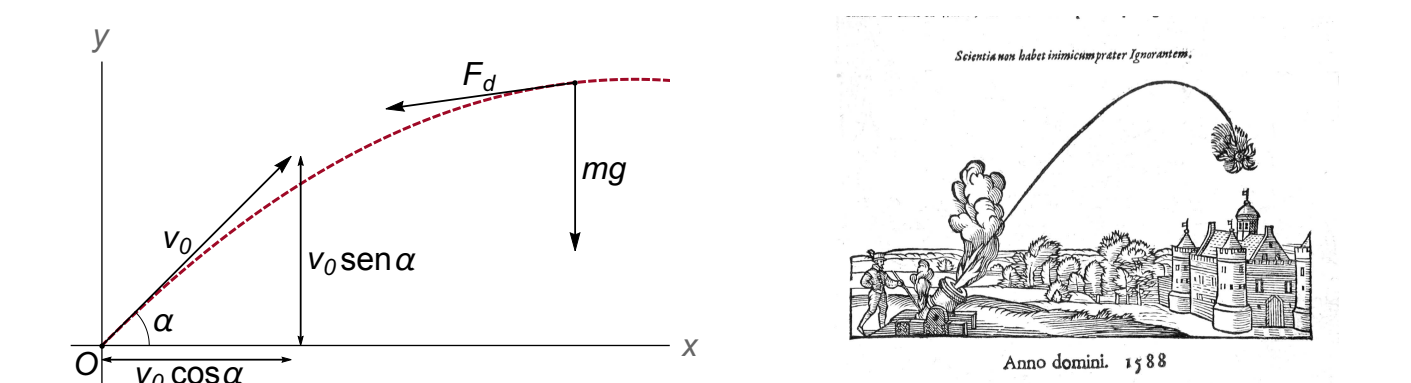
Estudio de regiones de seguridad en trayectorias de proyectiles

Alberto Arenas Gómez

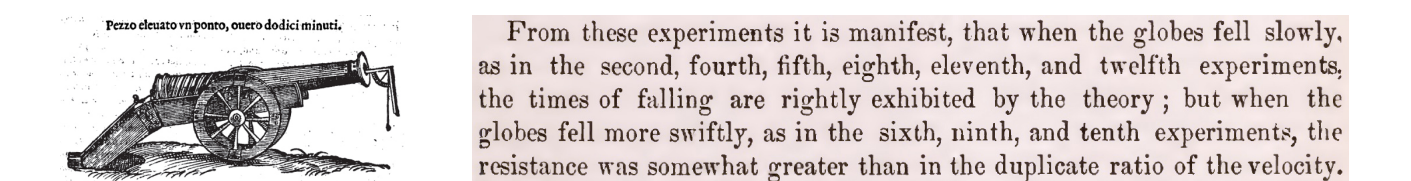
Tutor: Óscar Ciaurri Ramírez

Introducción

Objetivo. Determinar las regiones del plano en las que un objetivo no puede ser alcanzado por un proyectil, denominadas regiones de seguridad. Diremos que D es la región de seguridad de una familia de trayectorias $\{T_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$, si cualquier objeto dentro de D no puede ser alcanzado por ningún proyectil que siga una trayectoria T_α .



Planteamiento. Suponemos el lanzamiento de un proyectil esférico de masa m desde un punto O —que situamos en el origen de un sistema de coordenadas cartesianas— con una velocidad inicial v_0 , formando un ángulo $\alpha \in (0, \pi)$ con la horizontal. Además, consideraremos una fuerza de rozamiento F_d que se opone al movimiento del proyectil.



Para el moviento de una esfera, la fuerza de rozamiento depende de un factor adimensional Re conocido como número de Reynolds. En este póster exponemos dos situaciones:

Sin rozamiento Se corresponde con $F_d = 0$ y se conoce como tiro parabólico clásico, cuyos resultados únicamente son válidos en el vacío.

Rozamiento cuadrático Es de la forma $F_d = kv^2$ y se suele tomar en el caso de números de Reynolds tales que $10^3 < Re < 3 \times 10^5$.

Región de seguridad en el tiro parabólico con rozamiento cuadrático

Isaac Newton Confirmación experimental de que el rozamiento cuadrático es el apropiado para proyectiles esféricos y obtiene las ecuaciones del movimiento, aunque no es capaz de resolverlas. *Principia Mathematica*, 1687.

Johann Bernoulli Resolución del sistema de ecuaciones mediante cuadraturas. *Responsio ad nonneminis provocationem, ejusque solutio quæstionis ipsi ab eodem propositæ, de inveniendâ lineâ curvâ quam describit projectile in medio resistente*, 1719.



Leonhard Euler Resolución del sistema mediante cuadraturas de funciones que dependen únicamente de α y del ángulo local de la trayectoria ϕ . *Recherches sur la veritable courbe que décrivent les corps jettés dans l'air ou dan un autre fluide quelconque*, 1755.

Suponiendo $v_0 = g = 1$, las ecuaciones paramétricas para las trayecotiras de los proyectiles son

$$x = \int_{-\xi}^{u(t)} \frac{dp}{f(p, \xi)} \quad e \quad y = - \int_{-\xi}^{u(t)} \frac{p}{f(p, \xi)} dp, \quad \text{con } t = \int_{-\xi}^u \frac{dp}{\sqrt{f(p, \xi)}}$$

el tiempo, $u(t) = -\operatorname{tg} \phi(t)$, $\xi = \operatorname{tg} \alpha$ y

$$f(x, y) = \frac{k}{m} (g(x) + g(y)) + 1 + y^2$$

donde $g(x) = x\sqrt{1+x^2} + \operatorname{arg} \sinh x$.

Estas ecuaciones no se pueden expresar en términos de funciones analíticas elementales.

Grado en Matemáticas

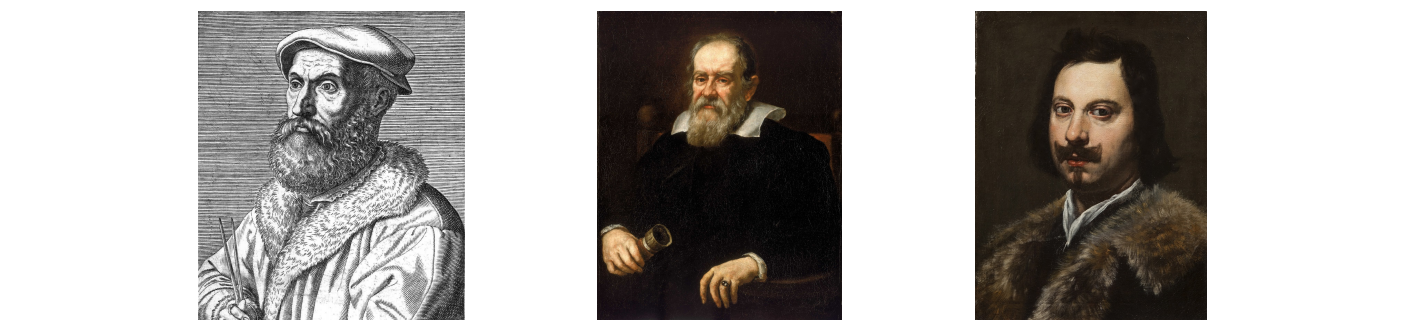
Facultad de Ciencias, Estudios Agroalimentarios e Informática



Región de seguridad en el tiro parabólico clásico

Niccolò Fontana «Tartaglia» La trayectoria del proyectil no posee ningún segmento rectilíneo. *Quesiti et inventioni diverse*, 1546.

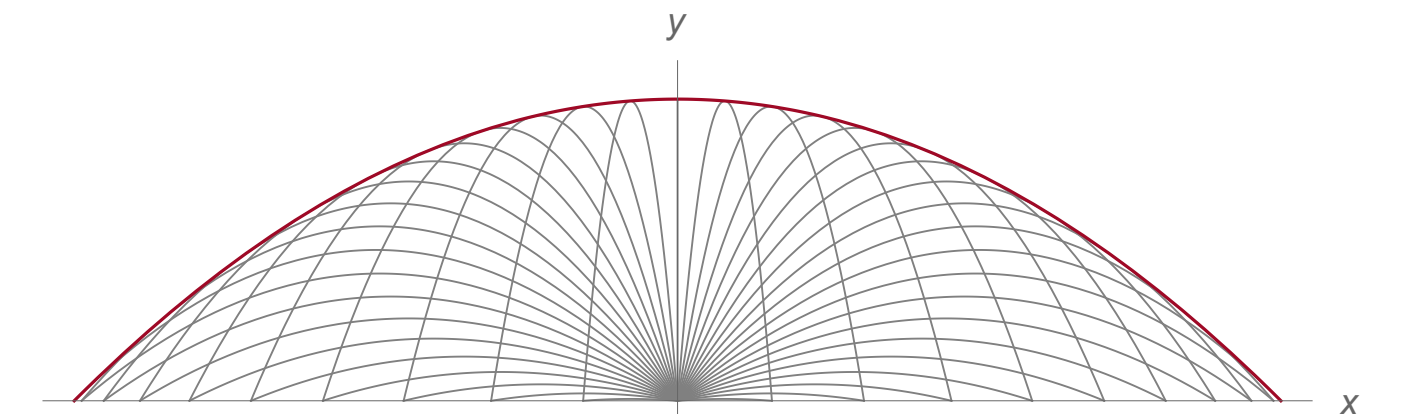
Galileo Galilei Los proyectiles siguen una trayectoria parabólica. *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche*, 1638.



Evangelista Torricelli Todas las trayectorias están dentro de otra parábola, denominada parábola de seguridad, que es la que delimita la región de seguridad. *Opera geometrica*, 1644.

Las ecuaciones de las trayectorias de los proyectiles y de la parábola de seguridad son, respectivamente,

$$y = x \left(\operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x \right) \quad e \quad y = \frac{g}{2v_0^2} \left(\left(\frac{v_0^2}{g} \right)^2 - x^2 \right).$$



Teorema.- La región de seguridad asociada a las trayectorias de proyectiles en un medio con rozamiento cuadrático está delimitada por la curva dada en coordenadas paramétricas

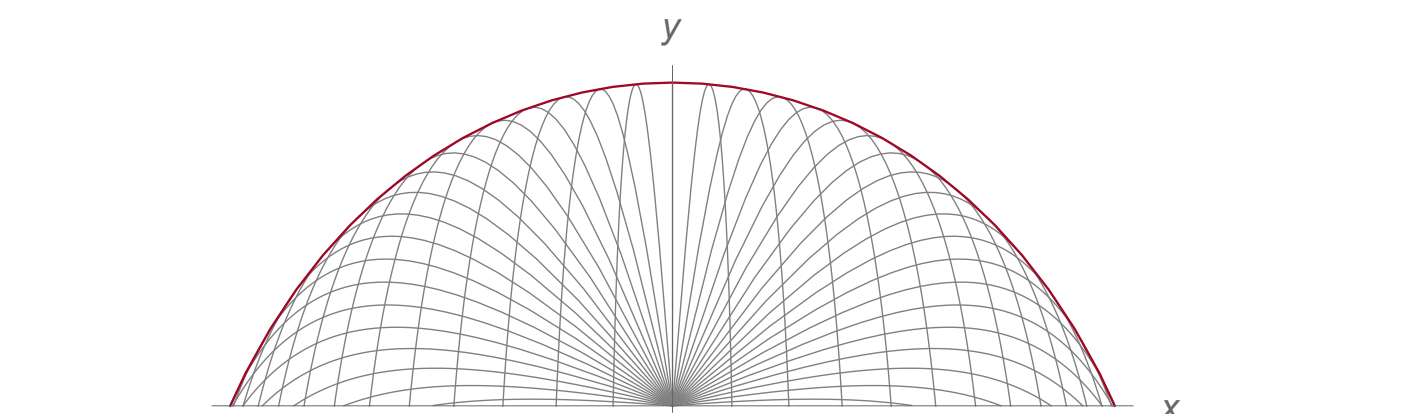
$$x = \int_{-\xi}^{u(\xi)} \frac{dp}{f(p, \xi)}, \quad y = - \int_{-\xi}^{u(\xi)} \frac{p}{f(p, \xi)} dp,$$

para $\xi \in (\xi_0, \infty)$, con

$$\xi_0 = \inf_{\xi \in (0, \infty)} \left\{ 1 - 2(1 + \xi^2) \left(\xi + \frac{k}{m} \sqrt{1 + \xi^2} \int_{-\xi}^{\infty} \frac{1}{f^2(p, \xi)} dp \right) < 0 \right\},$$

y donde $u(\xi)$ es la única solución, en el intervalo $(-\xi, \infty)$, a la ecuación

$$\xi + u + 2(1 + \xi^2) \left(\xi + \frac{k}{m} \sqrt{1 + \xi^2} \right) \int_{-\xi}^u \frac{p - u}{f^2(p, \xi)} dp = 0.$$



El valor de $u(\xi)$ determina el punto en común entre cada trayectoria y la envolvente.

Las trayectorias asociadas con un ángulo de lanzamiento tal que $\xi \leq \xi_0$ no poseen punto de tangencia con la envolvente, ya que el proyectil desciende vertiginosamente debido a la acción del rozamiento y de la gravedad.

Publicado en: A. Arenas y Ó. Ciaurri, *Safe domain for projectile trajectories in a medium with quadratic drag force*, Math. & Mech. of Solids, en prensa.



www.unirioja.es