

El examen está distribuido en tres bloques, cada uno con 3 ejercicios.

En total se debe contestar a 4 ejercicios, de dos maneras posibles: o bien se eligen dos bloques y se contesta a 2 de cada uno de ellos, o bien se contesta a 2 de un bloque y a 1 de cada bloque restante.

Para evitar confusiones, se recomienda consignar claramente en la primera página de las hojas de respuestas a qué cuatro ejercicios se responde en el examen.

Todos los ejercicios valen 2.5 puntos, y en la mayoría de ellos dicha puntuación se desglosa con más detalle.

Todas las respuestas deben ser debidamente justificadas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean ni programables ni gráficas, y que no calculen integrales.

El **tiempo** disponible para resolver el examen es de **una hora y media**.

Bloque 1. Álgebra y Programación Lineal.

1.1.– ¿Para qué valores de a tiene soluciones el siguiente sistema?

$$\begin{cases} x + y + 2z = 12 \\ 2x - y - z = 12 \\ 2x + 2y + az = 12 \end{cases}$$

[0.75 puntos]

Resuelve el sistema en el caso $a = 0$. [1.25 puntos]

Si para una valor a el sistema es incompatible, y sustituimos los términos independientes $(12, 12, 12)$ por $(12, 12, 24)$, ¿cómo clasificaríamos el sistema resultante?

[0.5 puntos]

1.2.- Justifica que la siguiente matriz es regular, y calcula su matriz inversa:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

[2.5 puntos]

1.3.- Un orfebre emplea 2 horas para fabricar un anillo, y tarda 3 horas en hacer un brazalete. El material de cada anillo le cuesta 40 €, y el del brazalete 320 €. A cambio, por cada anillo gana 10 € y por cada brazalete gana 90 €.

Si no quiere dedicar más de 50 horas a su trabajo semanal y no puede gastar en material más de 2560 €, ¿cuántos anillos y brazaletes en una semana le reportarán el máximo beneficio? [1.75 puntos]

¿Cambiaría la respuesta si ya tuviera apalabrados ocho anillos? ¿Cuánto tiempo trabaja en total en ambos casos en la fabricación de anillos y brazaletes?

[0.75 puntos]

Bloque 2. Análisis.

2.1.- Representa conjuntamente, en el intervalo de abscisas $[-2, 3]$, las gráficas de las funciones f y g dadas por

$$f(x) = x^2 + 2x \quad \text{y} \quad g(x) = 5 - 2x. \quad [1.5 \text{ puntos}]$$

¿Qué punto a hace que sea continua la función

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } -2 \leq x < a, \\ g(x) & \text{si } a \leq x \leq 3? \end{cases}$$

Resalta la gráfica de h en el dibujo anterior. ¿Cuáles son el máximo y el mínimo de los valores de h en $[-2, 3]$? [1 punto]

2.2.- La distancia que ha recorrido un coche hasta el instante t , desde que arrancó en $t = 0$, viene dada por la siguiente función $e(t)$ entre $t = 1$ y $t = 4$:

$$e(t) = \begin{cases} 120t + 90 & \text{si } 1 \leq t < 3, \\ C - 240t + 150t^2 - 20t^3 & \text{si } 3 \leq t \leq 4. \end{cases}$$

En $t = 4$ se para, de forma que $e(t) = e(4)$ para cada t en $(4, 5]$.

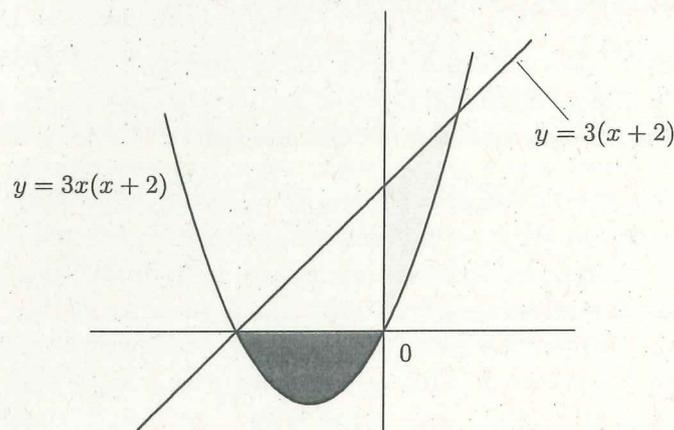
(i) Calcula el valor de C , considerando que $e(t)$ define una función continua.

[0.75 puntos]

(ii) La velocidad en cada instante $v(t)$ es la derivada del espacio recorrido, es decir $v(t) = e'(t)$. Expresa cuánto vale dicha derivada en cada punto, e investiga si es una función continua en $[1, 5]$. ¿Cómo expresarías, en términos de la velocidad, que la gráfica de $e(t)$ es recta en el intervalo $[1, 3]$ y en el intervalo $[4, 5]$? [1 punto]

(iii) Calcula la distancia recorrida entre $t = 3$ y $t = 4$, es decir $e(4) - e(3)$. ¿Por qué es igual a $\int_3^4 v(t) dt$? [0.75 puntos]

2.3.- Calcula el área de las dos regiones señaladas en el siguiente dibujo:



[2.5 puntos]

Bloque 3. Estadística y Probabilidad.

3.1.- En una casa hay tres llaveros: A , B y C , el primero con cinco llaves, el segundo con siete y el tercero con ocho. En cada llavero hay una única llave que abre la puerta del trastero. Se escoge al azar un llavero, y de él se toma a su vez una llave al azar. Entendemos que, cuando se escoge una cosa al azar entre varias, todas ellas tienen la misma probabilidad de ser la escogida. Se pide:

(i) La probabilidad de que la llave elegida abra el trastero. [1.25 puntos]

(ii) Si resulta que lo abre, la probabilidad de que sea del llavero A . [1.25 puntos]

3.2.— Una variable X es normal de media 25 y desviación típica 5, y otra Y es también normal, pero con media 28 y desviación típica 1.

(i) Calcula las probabilidades $P(X > 30)$ y $P(Y > 30)$. ¿Cuál es mayor? [1 punto]

(ii) Tomamos una muestra de $n = 4$ valores independientes de X y anotamos su promedio \bar{X} . Calcula $P(\bar{X} > 30)$. ¿Cuál sería el resultado si $n = 9$?

[1 punto]

(iii) ¿Cómo explicarías la comparación del resultado de (ii) con el de (i), sin recurrir a fórmulas? [0.5 puntos]

3.3.— Como ya sabe la cifra de asistentes, el ayuntamiento de Zaragoza ha asegurado que la duración de la ofrenda de flores del día del Pilar tendrá, en horas, una distribución de probabilidad normal con media 8 y desviación típica $\sqrt{2}/5$.

(i) ¿Puedes afirmar, con al menos un 95% de probabilidad de acierto, que la duración de la ofrenda será inferior a ocho horas y media? ¿Podemos hacerlo con probabilidad mayor del 99%? [1.5 puntos]

(ii) Una variable normal estándar Z cumple que $P(Z \leq 2.3263) = 0.99$. ¿Qué desviación típica (en lugar de la dada, y manteniendo la media de ocho horas) debería tener la duración de la ofrenda para que la probabilidad de ser menor que ocho horas y media fuera del 99%? [1 punto]

Tabla de la distribución normal estándar:

z	+0.00	+0.01	+0.02	+0.03	+0.04	+0.05	+0.06	+0.07	+0.08	+0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56360	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91308	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997
4.0	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99998	0.99998	0.99998	0.99998

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

- (1.1) La resolución del sistema correcta se valorará igualmente en puntos independientemente del método elegido.
No tiene mucha disculpa resolver mal el sistema, porque el estudiante debería verificar que su solución cumple las ecuaciones.
- (1.2) Se puede resolver en pocas líneas, pero se aplicará el mismo criterio que en el ejercicio anterior.
- (2.1) Para que la respuesta a la última pregunta sea totalmente correcta se debe considerar el valor de h en 3.
- (2.2) Se puede valorar si se cuestiona que $e(t)$ debe ser una función creciente, pero no es necesario para responder al ejercicio. Por supuesto tampoco es necesario calcular la integral expresada al final, pero si se responde con el cálculo efectivo no se restará puntuación.
- (2.3) Por una parte hay que valorar la obtención correcta de los puntos de corte, y la integral se puede dar por buena si se aplica a un intervalos incorrectos pero se resuelve bien.
- (3.2) Cualquier respuesta parcial en la dirección correcta para responder a (iii) se debe valorar positivamente.
- (3.3) El valor 2.3263 se da para que no sea necesario usar la tabla, dando por supuesto que se usaría sin interpolar.