

El examen está distribuido en tres bloques, cada uno con 3 ejercicios.

En total se debe contestar a 4 ejercicios, de dos maneras posibles: o bien se eligen dos bloques y se contesta a 2 de cada uno de ellos, o bien se contesta a 2 de un bloque y a 1 de cada bloque restante.

Para evitar confusiones, se recomienda consignar claramente en la primera página de las hojas de respuestas a qué cuatro ejercicios se responde en el examen.

Todos los ejercicios valen 2.5 puntos, y en la mayoría de ellos dicha puntuación se desglosa con más detalle.

Todas las respuestas deben ser debidamente justificadas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean ni programables ni gráficas, y que no calculen integrales.

El **tiempo** disponible para resolver el examen es de **una hora y media**.

Bloque 1. Álgebra y Programación Lineal.

1.1.— En el último sorteo de la lotería primitiva Juan acertó 4 números. Su padre le preguntó qué números había acertado. Juan le planteó el siguiente acertijo para que adivinase tres de ellos: la suma de los tres números es 73; si al mayor de los tres números le quitas 3 unidades, obtienes la suma de los otros dos; el doble del menor de los tres números más el mayor de ellos es el triple del otro número más 8 unidades.

- (a) ¿Cuáles eran esos tres números? [2 puntos]
- (b) ¿Cuál es el cuarto número, si es la mitad de la suma de los dos mayores de los tres anteriores? [0.5 puntos]

1.2.— Sea A una matriz inversible de orden 2.

(i) Halla las matrices X e Y que cumplen que

$$\begin{cases} AX + Y = I \\ AX - Y = 0 \end{cases}$$

(donde I es la matriz identidad $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y 0 es la matriz nula) [0.75 puntos].

(ii) En particular, calcula las soluciones X e Y para $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ [1.75 puntos].

1.3.— Dibuja la región del plano formada por los puntos (x, y) que cumplen

$$\begin{aligned} 0 &\leq y, \quad 0 \leq x \leq 2, \\ x + y &\leq 3, \text{ y} \\ x + 3y &\leq 6. \end{aligned}$$

[1.25 puntos]

Averigua el valor máximo que alcanzan en dicha región las siguientes funciones, y en qué puntos lo alcanza cada una:

$$f(x, y) = 7x + 5y \quad \text{y} \quad g(x, y) = x + 5y.$$

[1.25 puntos]

Bloque 2. Análisis.

2.1.— Representa gráficamente la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 + 2x + 1},$$

de forma que se aprecien claramente su dominio, sus asíntotas verticales y horizontales, sus cortes con los ejes, sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus máximos y mínimos relativos [2.5 puntos]

2.2.— Consideramos la función f dada por $f(x) = x^3 - 3x$.

(a) Halla sus extremos relativos [1.25 puntos].

(b) ¿Cuánto vale $f'(1)$? ¿Cuál es la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(1, f(1))$? [0.75 puntos]

(c) ¿En qué otro punto $(t, f(t))$ corta dicha recta a la gráfica de f ? [0.5 puntos]

Nota: si no has sabido responder al apartado (b), en (c) debes resolver la ecuación $f(x) = f(1)$.

2.3.— Haz un dibujo de la gráfica de la función $f(x) = (x - 1)(x - 4)$, señalando si existen sus máximos y mínimos [0.75 puntos].

Calcula el área de la región del plano limitada por la gráfica y la recta $y = 10$ [1.75 puntos].

Bloque 3. Estadística y Probabilidad.

3.1.— Hace un siglo, en cierto país el porcentaje de hombres y mujeres entre la población adulta era en ambos casos del 50 %. El porcentaje de fumadores entre los hombres era del 60 %, mientras que únicamente fumaba la décima parte de las mujeres.

(i) ¿Cuál era el porcentaje de personas fumadoras entre la población adulta de ese país? [1 punto]

(ii) Entre las personas fumadoras, ¿cuál era el porcentaje de mujeres? [1 punto]

(iii) El abuelo Joaquín decía que una persona era “como Dios manda” si o bien era hombre y fumaba o bien era mujer y no fumaba. ¿Qué porcentaje de personas adultas era como Dios manda, según el abuelo Joaquín? [0.5 puntos]

3.2.— Los ingresos mensuales por ventas de un establecimiento siguen una distribución normal, con una desviación típica de 900 €. Con los datos de los últimos 9 meses han calculado, como intervalo de confianza para la media mensual de ingresos, el intervalo comprendido entre 4663 y 5839 €.

(a) ¿Cuál fue el promedio de los ingresos en esos nueve meses? [0.5 puntos]

(b) ¿Con qué nivel de confianza se ha obtenido el intervalo? [1.5 puntos]

(c) Si con el mismo nivel de confianza el intervalo hubiera sido el comprendido entre 4957 y 5545, ¿cuántos meses habrían formado la muestra? [0.5 puntos]

3.3.— Un estudio de la OCDE de 2009 estableció que la estatura media de los adultos varones en España era de 174 cm, con una desviación típica de 8 cm. Asumiremos que la distribución era normal. ¿Cuál era la probabilidad de que un hombre adulto español midiera más de 190 cm? **[1.75 puntos]** Responde utilizando la tabla de la distribución la normal estándar que se incluye al final.

Entre los hombres holandeses, que eran los más altos según aquel estudio, la probabilidad de medir más de 190 cm (suponiendo también una desviación típica de 8 cm y una distribución normal) era 0.15866. ¿Cuál era la estatura media de los hombres holandeses? **[0.75 puntos]**

Tabla de la distribución normal estándar:

z	+0.00	+0.01	+0.02	+0.03	+0.04	+0.05	+0.06	+0.07	+0.08	+0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56360	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91308	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997
4.0	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99998	0.99998	0.99998	0.99998

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

- (1.1) Se sugiere valorar en 1 punto el planteamiento del sistema e igualmente la resolución. No hay que ser más indulgente con la resolución de un sistema equivocado, si no repasan con posterioridad si su solución cumple el enunciado.
- (1.2) (ii) se puede resolver (fácilmente) si se consideran las ocho incógnitas de entradas en las matrices X e Y , y se espera que lo hagan así si no saben usar la inversa de A .
- (1.3) Para la segunda parte se sugiere repartir 0.75 para f y 0.5 para g ,
- (2.1) Una sugerencia: 0.25 al dominio, 0.5 las asíntotas, 0.25 los cortes con los ejes, 0.75 el cálculo de f' y $0.5+0.25$ crecimiento y extremos, dependiendo de cómo los justifiquen.
- (2.2) Se sugiere ser indulgente con los errores en los cálculos de la integral, si esta se plantea correctamente y dan muestra de conocer la primitiva.
- (3.3) La puntuación podría modificarse para valorar más la parte más sencilla.