EL GIROSCOPIO

1 A modo de curiosidad

Antes de empezar, seguro que has observado en una carrera de motos que éstas, al tomar una curva, se inclinan para girar en la curva. Es más, el motorista con sólo inclinarse ya toma la curva sin necesidad de girar el manillar. Sin embargo esto sólo ocurre cuando las ruedas de la moto están girando a gran velocidad: si la moto fuera lenta o estuviera en reposo, al inclinarse, se caerían al suelo moto y motorista. Pues bien, esto es el fundamento del giroscopio, que es una de los objetos más complicados de describir en Mecánica Clásica. Y es lo que vamos a estudiar en lo que sigue.

2 Introducción a las leyes de la Mecánica

Para explicar el giroscopio es necesario que repasemos los fundamentos de la mecánica del sólido rígido. Si esto ya lo conoces, puedes pasar a la siguiente sección.

La ecuación fundamental que describe el movimiento de una partícula, es decir de una masa lo suficientemente pequeña para que podamos considerar que no tiene dimensiones o que sus dimensiones no juegan ningún papel en el movimiento, es

$$\begin{gathered}\text{fuerza aplicada} = \text{variación con el tiempo del momento lineal} \\ \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}\,. \end{gathered} \tag{1}$$

El momento lineal es un vector — esto es, una magnitud para la que hay que dar no sólo su valor sino también su dirección y sentido — que depende de la masa y de la velocidad de la partícula:

$$\text{momento lineal } \vec{p} = m\,\vec{v}\,. \tag{2}$$

Sin embargo, lo normal es que tengamos un cuerpo compuesto por muchas partículas: un sistema de partículas. Puesto que la ecuación (1) se cumple para cada una de las partículas, sumando sobre todas estas partículas obtenemos

$$\sum_i \vec{F}_i = \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i \vec{p}_i\right) = \frac{d\vec{p}_{\text{total}}}{dt}\,, \tag{3}$$

donde la suma de los momentos de cada una de las partículas se llama, lógicamente, el momento del sistema de partículas $\vec{p}_{\text{total}}$. En esta ecuación, $\sum_i \vec{F}_i$ lo podemos simplificar un poco: las fuerzas que actúan sobre cada una de las partículas i pueden ser debidas o a fuerzas exteriores a todo el sistema de partículas o a fuerzas que hagan el resto de las partículas del sistema sobre la partícula i. Estas últimas fuerzas, debidas a interacciones mutuas entre partículas dentro del sistema de partículas, se compensan entre sí al sumarse en $\sum_i \vec{F}_i$, por lo que lo único que realmente contribuye a este sumatorio son sólo las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema de partículas. El que las fuerzas entre partículas no determinen la dinámica de todo el sistema es bien lógico: como ejemplo, nunca conseguirás avanzar hacia adelante tirándote a tí mismo del brazo.

Para terminar de simplificar la ecuación (3) nos hace falta obtener un resultado para el momento lineal del sistema $\vec{p}_{\text{total}}$ que sea más manejable que decir que es la suma de los momentos de todas las partículas del sistema. Y para ello necesitamos el concepto de centro de masas o centro de gravedad. Aunque todos tenemos una idea más o menos intuitiva de qué es el centro de gravedad de un cuerpo (por ejemplo, el centro de gravedad del ser humano coincide aproximadamente con el ombligo), la definición del centro de masas (o centro de gravedad) de un sistema de partículas es un poco más complicada. La velocidad del centro de masas se define como la media ponderada de la velocidad [1] calculada sumando la masa de cada una de las partículas multiplicada por su velocidad y dividido todo por la masa total del sistema

$$\vec{v}_{\text{cm}} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots} = \frac{\sum_i m_i\,\vec{v}_i}{\sum_i m_i}\,. \tag{4}$$

El concepto del centro de masas vamos a aclararlo con un par de ejemplos, en los que veremos cómo esta media ponderada (4) coincide con la velocidad de lo que intuitivamente sabemos que es el centro de gravedad:

- Consideremos una piedra desplazándose horizontalmente: en cada instante de tiempo, todos los puntos de la piedra se mueven con la misma velocidad y por tanto la media ponderada de la velocidad es esta misma velocidad — la velocidad media en una autopista por la que todos los coches circulan a 120 km/h es por supuesto 120 km/h —: el centro de gravedad de la piedra por lo tanto también se mueve con esa misma velocidad.

- Consideremos ahora un disco circular horizontal que está girando en torno a un eje que pasa por su centro. En este caso cada punto del disco tiene una velocidad de traslación distinta (los puntos más lejanos del eje se desplazan más rápidamente que los que están más cerca del centro). Sin embargo, por la misma simetría circular del disco, y puesto que el disco gira en torno a su centro, elijamos el punto que queramos del disco, siempre podemos encontrar en el disco su punto simétrico que se desplace con la misma velocidad que el primer punto elegido pero en sentido

[1] Ejemplo de media ponderada: si en una autopista por la que circulan 30 autos, 7 de ellos van a 120 km/h, 3 a 110 km/h, 12 a 100 km/h y 8 van a 90 km/h, cuál es la velocidad media en esa autopista? La respuesta es $\dfrac{7\times 120 + 3\times 110 + 12\times 100 + 8\times 90}{7+3+12+8} = 103$ km/h.

contrario (es decir, con un valor de velocidad que sea menos el valor de la velocidad del primer punto elegido). La media ponderada es por tanto cero. Y la velocidad de traslación del centro del disco es también cero: si dejamos "suelto" al disco, este no se desplaza.

Un caso distinto sería si ahora el disco horizontal ya no girara en torno a un eje que pasara por su centro, sino en torno a un eje que por ejemplo estuviera muy cerca de la periferia del disco. En tal caso la media ponderada de la velocidad ya no sería cero: hay muchos más puntos a un lado del eje que al otro y por lo tanto ya no podemos encontrar para cualquier punto del disco otro punto que lleve su misma velocidad pero en sentido contrario. Y por otro lado, si ahora soltáramos el disco, este sí se desplazaría: volvemos a ver que *la media ponderada de la velocidad está relacionada con el desplazamiento del centro de gravedad del sistema de partículas.*

Así, el momento lineal de todo el sistema de partículas $\vec{p}_{\text{total}}$ que aparece en la ecuación (3) se define como el producto de la masa total del sistema de partículas por la velocidad de traslación que lleva el centro de masas

$$\vec{p}_{\text{total}} = \sum_i \vec{p}_i = (m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots) = \underbrace{(m_1 + m_2 + \ldots)}_{m_{\text{total}}} \underbrace{\left(\frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots}\right)}_{\vec{v}_{\text{cm}}}. \quad (5)$$

O dicho de otro modo, el centro de masas (o de gravedad) es el punto del sistema de partículas en el que, para el movimiento de *traslación* de todo el sistema, se puede considerar concentrada toda la masa del sistema de partículas moviéndose con la velocidad de tal centro de masas. Por ello, a (5) también se le puede llamar momento lineal del centro de masas. Con esto, la ecuación (3) que relaciona las fuerzas con la variación con el tiempo del momento lineal de un sistema de partículas toma la forma

$$\text{suma de fuerzas exteriores} = \text{variación del momento lineal del sistema de partículas}$$

$$\sum_i \vec{F}_{\text{ext},\, i} = \frac{d\vec{p}_{\text{total}}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m_{\text{total}}\,\vec{v}_{\text{cm}}\right). \quad (6)$$

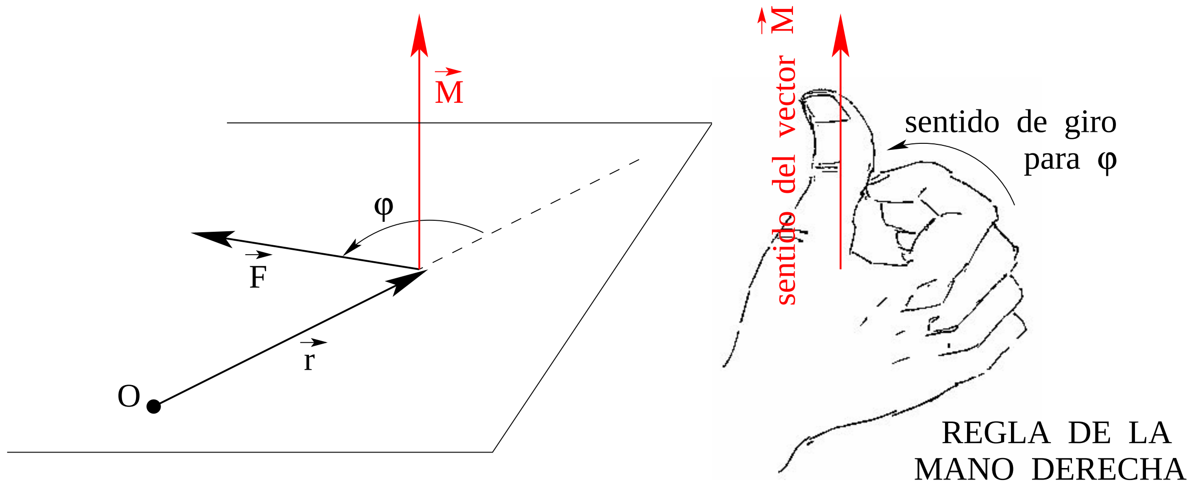
Como acabamos de ver en el segundo ejemplo anterior, para describir completamente el movimiento de un sistema de partículas *no* nos vale con saber la velocidad de traslación del centro de masas: el disco puede estar girando en torno a su centro pero no desplazarse, con lo que decir que el centro de masas no se desplaza no es suficiente para describir cómo se está moviendo el disco. Nota que esto no ocurría para una única partícula, en donde hablar de giros no tiene sentido al no tener la partícula nigún tamaño o dimensiones. Para describir la dinámica de un sistema de partículas por completo hay que tener en cuenta los giros. Y para describir los giros, un elemento fundamental es saber en torno a qué eje o punto está girando el sistema de partículas (compara los dos casos vistos en el ejemplo del disco que giraba).

La capacidad que tiene una fuerza de hacer girar un cuerpo en torno a un eje se llama el momento de la fuerza respecto a ese eje y se define matemáticamente como el siguiente producto vectorial

$$\left(\vec{M}\right)_O = \left(\vec{r}\right)_O \times \vec{F}, \quad (7)$$

donde $\left(\vec{r}\right)_O$ es el vector de posición que va desde el punto O (por donde pasa el eje de rotación) hasta el punto de aplicación de la fuerza $\vec{F}$. Nota que el producto vectorial da como resultado un vector, cuyo módulo se define por

$$\left|\vec{M}\right| = |\vec{r}| \cdot \left|\vec{F}\right| \cdot \operatorname{sen}\varphi\,, \tag{8}$$



y depende del ángulo φ que forme la fuerza con el vector de posición que viene desde el punto O por donde pasa el eje. La dirección y sentido del momento de la fuerza lo determinan la regla de la mano derecha: la dirección del producto vectorial $\vec{r} \times \vec{F}$ es perpendicular al plano donde están contenidos los dos vectores $\vec{r}$ y $\vec{F}$; y el sentido del producto vectorial es hacia donde apunte el pulgar de la mano derecha cuando el resto de los dedos están colocados en el sentido de giro del ángulo φ cuando se va del primer factor (esto es, $\vec{r}$) al segundo factor (o sea, $\vec{F}$) de $\vec{r} \times \vec{F}$, considerando este sentido de giro a lo largo del camino más corto que una a los dos vectores que se multiplican y tomando el sentido una vez que "mentalmente" hemos colocado los dos vectores saliendo del mismo origen.

De la misma forma que para la traslación de un sistema de partículas es el momento lineal del sistema — que depende de la masa y de la velocidad de traslación — la magnitud fundamental, en el caso de la rotación se define una magnitud que es en parte similar: el momento angular. Lo mismo que el momento lineal depende de la velocidad de traslación, el momento angular depende de la velocidad de rotación $\vec{\omega}$; y también el momento angular, como el momento lineal, depende de la masa del sistema de partículas, si bien esta dependencia es ahora más complicada: no sólo va a depender de la masa sino de las dimensiones del sistema de partículas (o sea, de su forma). La magnitud que contiene esta información sobre la masa y dimensiones del sistema de partículas se llama momento de inercia I, aunque ahora no necesitamos saber cómo depende exactamente de la masa y de la forma del cuerpo. Lo que sí que es importante, y ya te habrás ido dando cuenta, es que todas las magnitudes que estamos definiendo para describir giros dependen sobre todo de la posición del eje de rotación (recuerda que para un mismo disco, no es lo mismo que gire en torno a su centro a que lo haga en torno a un eje que pase por la periferia del disco). Resumiendo, el momento angular de un sistema de partículas *con respecto a un eje* que pasa por O se define como

$$\text{momento angular con respecto al eje } O \quad \left(\vec{L}\right)_O = \left(I\right)_O \, \vec{\omega} \, . \tag{9}$$

Insistimos, tanto el momento de una fuerza (7) como el momento angular o el momento de inercia dependen de dónde esté colocado el eje de giro. La dirección y sentido del vector velocidad angular $\vec{\omega}$ se obtiene utilizando (otra vez) la regla de la mano derecha: $\vec{\omega}$ apunta en la dirección y sentido del pulgar cuando el resto de los dedos se "enrollan" en el sentido de giro del movimiento que estamos describiendo.

Al comienzo de esta introducción se habló de la dinámica del sólido rígido: este sólido rígido es una aproximación ideal a un sistema de partículas que no se deformara nunca, independientemente de la velocidad de rotación que lleve (aunque esto no se da nunca en la Naturaleza, hasta la Tierra está deformada debido a su propia rotación en torno a su eje). La relación que describe los giros en un sólido rígido, relación que completa así la información suministrada por la ecuación (6) para la traslación, es

$$\text{suma de momentos de fuerzas exteriores} = \text{variación del momento angular del sistema}$$

$$\sum_i \left(\vec{M}_{\text{ext},\,i}\right)_O = \frac{d}{dt}\left(\vec{L}_{\text{total}}\right)_O \, , \tag{10}$$

insistiendo otra vez en que para la rotación hay que indicar siempre respecto a qué eje nos estamos refiriendo. Nota que esta última ecuación tiene una forma bastante similar a la ecuación (6): donde allá se hablaba de fuerza y momento lineal, aquí se habla de momento de fuerza y momento angular. En los dos casos se tiene que la fuerza/momento de fuerza es la causa de la variación con el tiempo del momento lineal/momento angular. El conjunto de estas dos ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sum_i \vec{F}_{\text{ext},\,i} & = \dfrac{d}{dt}\vec{p}_{\text{total}} \, , \\ \\ \sum_i \left(\vec{M}_{\text{ext},\,i}\right)_O & = \dfrac{d}{dt}\left(\vec{L}_{\text{total}}\right)_O \, , \end{array} \right. \tag{11}$$

describen por completo la dinámica de un sistema de partículas rígido: se llaman las Leyes de Newton de la Mecánica.

> **Importante.** *Acabamos de ver que la relación que define el momento angular* $\left(\vec{L}\right)_O = \left(I\right)_O \vec{\omega}$ *es similar (en parte) a la relación que define el momento lineal* $\vec{p} = m\,\vec{v}$*: donde poníamos velocidad lineal y masa en el momento lineal, ponemos ahora velocidad angular y momento de inercia en el momento angular; y así como la fuerza exterior causa que el momento lineal varíe con el tiempo, es el momento de la fuerza exterior el causante de la variación con el tiempo del momento angular. Aparte de la cuestión de que para la ecuación del momento angular hay que señalar siempre el eje* O *respecto al que hacemos los cálculos — algo que no hace falta cuando se habla del momento lineal —, hay otra diferencia más con respecto al momento lineal* $\vec{p}$*: este último siempre cumple que es paralelo al vector velocidad* $\vec{v}$ *ya que la masa* m *es un escalar, es decir, un número, una constante. Sin embargo, en general el momento angular no es paralelo a la velocidad angular* $\vec{\omega}$ *ya que el momento de inercia no es un escalar (una constante) sino una matriz:*
>
> $$\left(\vec{L}\right)_O = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{zz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \left(I\right)_O \vec{\omega}\,.$$
>
> *Matemáticamente hablando se dice que el momento de inercia es un tensor. Sólo si el cuerpo tiene una forma lo suficientemente simétrica (y el caso del giroscopio, así como una rueda o una peonza pertenecen a esta categoría) y además cuando el giro tenga lugar en torno a un solo eje exclusivamente (o bien la velocidad de giro en torno a los otros ejes sea prácticamente despreciable), sólo entonces se puede decir que el momento angular es paralelo a la velocidad angular. En los demás casos, estos dos vectores no serán paralelos entre sí.*

La siguiente tabla cuadro contiene el resumen de los resultados obtenidos para la dinámica de traslación y rotación de un sistema de partículas, y sirve para destacar la similitud que hay entre ambas dinámicas:

Traslación		**Rotación**
espacio recorrido	$\leftrightarrow$	ángulo girado
velocidad lineal	$\leftrightarrow$	velocidad angular
masa del sistema	$\leftrightarrow$	momento de inercia
momento lineal del sistema: $\vec{p}_{\text{total}} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = m_{\text{total}} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$	$\leftrightarrow$	momento angular del sistema: $\left(\vec{L}\right)_O = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{zz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$
fuerza exterior: $\sum_i \vec{F}_{\text{ext},\,i} = \frac{d}{dt}\vec{p}_{\text{total}}$	$\leftrightarrow$	momento de la fuerza exterior: $\sum_i \left(\vec{M}_{\text{ext},\,i}\right)_O = \frac{d}{dt}\left(\vec{L}_{\text{total}}\right)_O$

Volvemos a repetir que la dinámica de rotación contiene dos diferencias fundamentales con respecto a la dinámica de traslación:

1. Siempre hay que indicar el eje respecto al cual hacemos los cálculos.
2. A diferencia de la dinámica de traslación, donde el momento lineal del sistema *siempre* es paralelo a la velocidad de traslación, en la dinámica de rotación esta relación entre momento angular y velocidad de rotación *no* se cumple en general.

Antes de acabar con esta introducción hay un punto que nos queda todavía por tratar. Hasta ahora hemos estado trabajando con vectores tanto fuerzas/momento de fuerzas como momento lineal/angular. Sin embargo la dinámica de una sistema de partículas puede ser descrita también utilizando el concepto de energía o trabajo, que tiene la ventaja sobre las Leyes de Newton (11) que en vez de trabajar con vectores (para los que hay que indicar módulo, dirección y sentido) se trabaja sólo con escalares, es decir con números a secas. El trabajo dW hecho por una fuerza $\vec{F}$ al desplazar un cuerpo una distancia muy pequeña $d\vec{r}$ viene definido por el producto escalar

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \tag{12}$$

Date cuenta que el producto escalar es el producto de los módulos de $\vec{F}$ y de $d\vec{r}$ y del coseno del ángulo φ que forman entre ellos: en otras palabras, aunque $\vec{F}$ y $d\vec{r}$ pueden ser dos vectores distintos de cero, el trabajo que hace la fuerza puede resultar cero si se da el caso de que $\vec{F}$ y $d\vec{r}$ son perpendiculares entre sí.

Consideremos un sólido rígido (es decir, un sistema de partículas que nunca se deforma) desplazándose sin rotar, esto es, cada partícula lleva la misma velocidad que el centro de masas. Y supongamos que actúa sobre este sistema una fuerza externa $\vec{F}_{\text{ext}}$: se pregunta cómo está relacionado el trabajo que realiza esta fuerza exterior con el momento lineal del sistema de partículas. De acuerdo con la Ley de Newton para el movimiento de traslación del centro de masas tenemos que $\vec{F}_{\text{ext}} = \dfrac{d}{dt}\vec{p}_{\text{total}}$, luego (12) se puede escribir como

$$dW = \vec{F}_{\text{ext}} \cdot d\vec{r} = \frac{d\vec{p}_{\text{total}}}{dt} \cdot d\vec{r} = d\vec{p}_{\text{total}} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{m_{\text{total}}} \left(\vec{p}_{\text{total}} \cdot d\vec{p}_{\text{total}}\right) , \tag{13}$$

después de “pasar” el dividendo dt (en el fondo una derivada no es más que un cociente) debajo de $d\vec{r}$ y, para el último paso, usando el siguiente razonamiento: puesto que por definición la velocidad lineal de traslación es $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ y el bloque se desplaza como un todo con la velocidad del centro de masas $\vec{v}_{\text{cm}} = \dfrac{\vec{p}_{\text{total}}}{m_{\text{total}}}$ (nota que la velocidad del centro de masas es paralela al momento lineal del sistema ya que la masa es un escalar, un número), tenemos que $d\vec{r} = \vec{v}_{\text{cm}}\, dt = \dfrac{\vec{p}_{\text{total}}}{m_{\text{total}}}\, dt$. Si ahora queremos saber el trabajo realizado por la fuerza exterior no sólo para un pequeño desplazamiento infinitesimal $d\vec{r}$ sino para todo un camino en donde ha estado actuando la fuerza, el trabajo total será la suma (mejor dicho, integral) a lo largo de todo ese camino de la constribuciones dadas por la ecuación (13), esto es

$$W = \int_{\text{camino}} dW = \frac{1}{m_{\text{total}}} \int_{\text{camino}} \vec{p}_{\text{total}} \cdot d\vec{p}_{\text{total}} = \frac{1}{m_{\text{total}}} \left[\frac{\vec{p}^{\,2}_{\text{final camino}}}{2} - \frac{\vec{p}^{\,2}_{\text{inicio camino}}}{2} \right] , \qquad (14)$$

teniendo en cuenta la bien conocida integral $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$. Fíjate que el trabajo depende de $\vec{p}^{\,2}_{\text{total}} = \vec{p}_{\text{total}} \cdot \vec{p}_{\text{total}}$, es decir, sólo del módulo (y no de la dirección o sentido) del momento lineal. Si nos fijamos más a fondo lo que vemos es que $\frac{1}{2m_{\text{total}}} \vec{p}^{\,2}_{\text{total}}$ no es otra cosa que la energía cinética de traslación

$$\frac{1}{2m_{\text{total}}} \vec{p}^{\,2}_{\text{total}} \overset{\vec{p}_{\text{total}}=m_{\text{total}}\vec{v}_{\text{cm}}}{=} \frac{1}{2m_{\text{total}}} \left(m_{\text{total}} \vec{v}_{\text{cm}} \right)^2 = \frac{m_{\text{total}}}{2} \vec{v}^{\,2}_{\text{cm}} .$$

La ecuación (14) expresa una ley física muy general: *el trabajo realizado por una fuerza es igual a la variación de energía mecánica del cuerpo sobre el que esta fuerza actúa.*

Y con esto llegamos a un resultado interesante: si la fuerza exterior es perpendicular al momento lineal del sistema de partículas, entonces esa fuerza no realiza trabajo. La razón es muy sencilla: puesto que como ya hemos visto se cumple que $d\vec{r} = \frac{\vec{p}_{\text{total}}}{m_{\text{total}}}\, dt$, entonces

$$dW = \vec{F}_{\text{ext}} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{m_{\text{total}}}\, \vec{F}_{\text{ext}} \cdot \vec{p}_{\text{total}}\, dt \,, \qquad (15)$$

y este producto escalar (y con ello el trabajo) es cero en este caso, puesto que la fuerza exterior y el momento lineal son perpendiculares entre sí. Puesto que esta fuerza no realiza trabajo, entonces de acuerdo con (14) se cumple que $\vec{p}^{\,2}_{\text{inicio camino}} = \vec{p}^{\,2}_{\text{final camino}}$ para cualquier camino: es decir,

> *el módulo del momento lineal de un sistema de partículas no varía si la fuerza exterior es perpendicular al momento lineal.*

O lo que es lo mismo: *la energía cinética no varía si $\vec{F}_{\text{ext}}$ y $\vec{p}_{\text{total}}$ son perpendiculares.* Un caso donde se da esta situación es por ejemplo en un satélite alrededor de la Tierra: la única fuerza que actúa sobre él es la atracción gravitatoria de la Tierra, que lleva una dirección perpendicular a la velocidad de traslación del satélite (y por tanto, también es perpendicular al momento lineal del satélite ya que el momento lineal es directamente proporcional a la velocidad de traslación del centro de masas). Es importante insistir en que este resultado deriva de la relación $d\vec{r} = \frac{\vec{p}_{\text{total}}}{m_{\text{total}}}\, dt$, esto es, porque $d\vec{r}$ y $\vec{p}_{\text{total}}$ son paralelos entre sí. Y esto se cumple siempre ya que el momento lineal del sistema es siempre paralelo a la velocidad del centro de masas. En esto se diferencia de la dinámica de rotación, donde tal relación no se cumple siempre.

Como ya te estarás imaginando, ahora nos queda ver qué forma tiene el trabajo realizado por una fuerza cuando en vez de trasladar el centro de masas lo que hace es hacer girar el sistema de partículas alrededor de un eje. Sin hacer la demostración matemática, sí que podemos obtener cuál va a ser el resultado final teniendo en cuenta la tabla anterior en la página 6: sustituimos la fuerza exterior por el momento de esta fuerza y en cambio del pequeño (infinitesimal) desplazamiento $d\vec{r}$ un pequeño ángulo girado $d\theta$. Como ya hemos visto para la velocidad angular, a este ángulo girado se le da carácter vectorial de acuerdo con la regla de la mano derecha (ver figura en la página 5). Obtenemos así

Traslación		**Rotación**
fuerza exterior $\vec{F}_{\text{ext}}$	$\leftrightarrow$	momento de la fuerza exterior $\left(\vec{M}_{\text{ext}}\right)_O$
desplazamiento infinitesimal $d\vec{r}$	$\leftrightarrow$	angulo girado infinitesimal $d\vec{\theta}$
$dW = \vec{F}_{\text{ext}} \cdot d\vec{r}$	$\leftrightarrow$	$dW = \left(\vec{M}_{\text{ext}}\right)_O \cdot d\vec{\theta}$

(16)

Ahora podríamos repetir pasos similares a los que en la dinámica de traslación nos han llevado a los resultados (14) y (15). Pero hay una dificultad, como muy posiblemente ya habrás descubierto: aunque por definición del vector velocidad angular $\vec{\omega}$ se cumple por supuesto que $d\vec{\theta} = \vec{\omega}\, dt$, lo que ya no se cumple en general es que $\vec{\omega} = \frac{1}{\left(I\right)_O} \left(\vec{L}_{\text{ext}}\right)_O$, puesto que el momento de inercia $\left(I\right)_O$ es en general una matriz y no un número. Lo correcto es

$$d\vec{\theta} = \begin{pmatrix} d\theta_x \\ d\theta_y \\ d\theta_z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{zz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}^{-1}}_{\text{inversa de la matriz } \left(I_{\text{ext}}\right)_O} \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} dt\,,$$

y por ello $d\vec{\theta}$ y el momento angular *no* son paralelos siempre, a diferencia de la dinámica de traslación donde $d\vec{r}$ y el momento lineal sí que lo eran. *Sólo* en los casos especiales en que $\vec{\omega}$ y $\left(\vec{L}\right)_O$ lleven la misma dirección — y esto ocurre cuando la forma del cuerpo y su rotación es tal que podamos afirmar que el momento angular apunta, prácticamente, a lo largo de uno de los ejes de simetría del cuerpo — podremos repetir los mismos pasos que para la dinámica de traslación y concluir así que, si el momento de la fuerza exterior es perpendicular al momento angular, entonces el módulo del vector momento angular permanece constante. Este va a ser el caso del giroscopio (o de la rueda de la moto) cuando esté girando sobre su eje a gran velocidad.

3 Precesión del giroscopio

El aparato que vamos a estudiar consta de las siguiente partes:

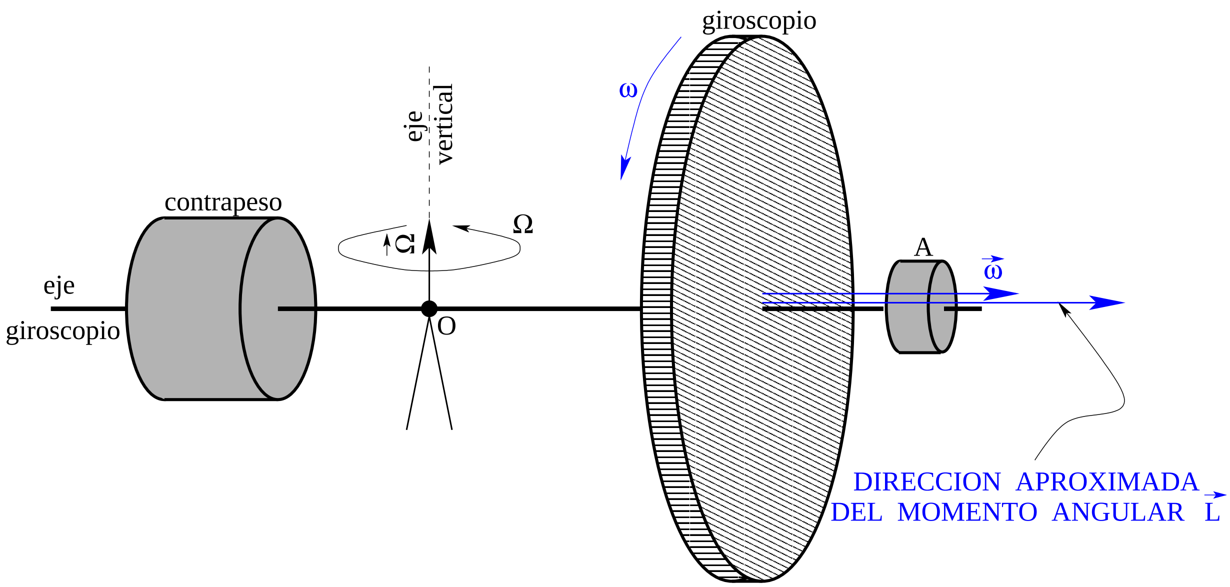
- Una base con un soporte vertical que sostiene un eje por un punto de apoyo O fijo. Este eje está articulado en O y puede cambiar su inclinación.

- Un disco vertical grande y pesado (para que así su momento de inercia sea grande) que gira en torno a un eje que pasa por su centro. Este disco es el giroscopio.

- Un contrapeso al otro lado del eje para que así el eje se pueda mantener horizontal en equilibrio. Cuando esto ocurre podemos afirmar que el centro de masas (o centro de gravedad) del sistema se halla colocado justo encima del punto O que es el soporte del eje.

- Una pesa A que se colocará en uno u otro de los extermos del eje para que así el centro de masas ya no esté encima de O sino desplazado fuera de la vertical del soporte.

Por ser el disco grande y masivo, el momento de inercia del giroscopio con respecto al eje que pasa por el centro del disco es mayor que con respecto a un eje vertical cualquiera (por ejemplo, el que pasa por el punto de apoyo O y que aparece con línea discontinua en la figura). Si además nos aseguramos que el disco gira con una velocidad angular ω



muy grande en torno al eje que pasa por el centro del disco, entonces la componente del momento angular que va paralela a este eje es mucho mayor que el resto de las otras componentes de momento angular (acuérdate de que el momento angular, por ser un vector, tiene tres componentes dirigidas cada una a lo largo de tres ejes perpendiculares entre sí), siendo estas componentes por lo tanto despreciables en primera aproximación. Si se cumple entonces que el disco y que ω son grandes, podemos considerar que el momento angular es prácticamente sólo su componente paralela al eje del giroscopio y con ello que el momento angular es paralelo al vector velocidad angular $\vec{\omega}$ del disco (recuerda la regla de la mano derecha en la página 5 para el vector velocidad angular).

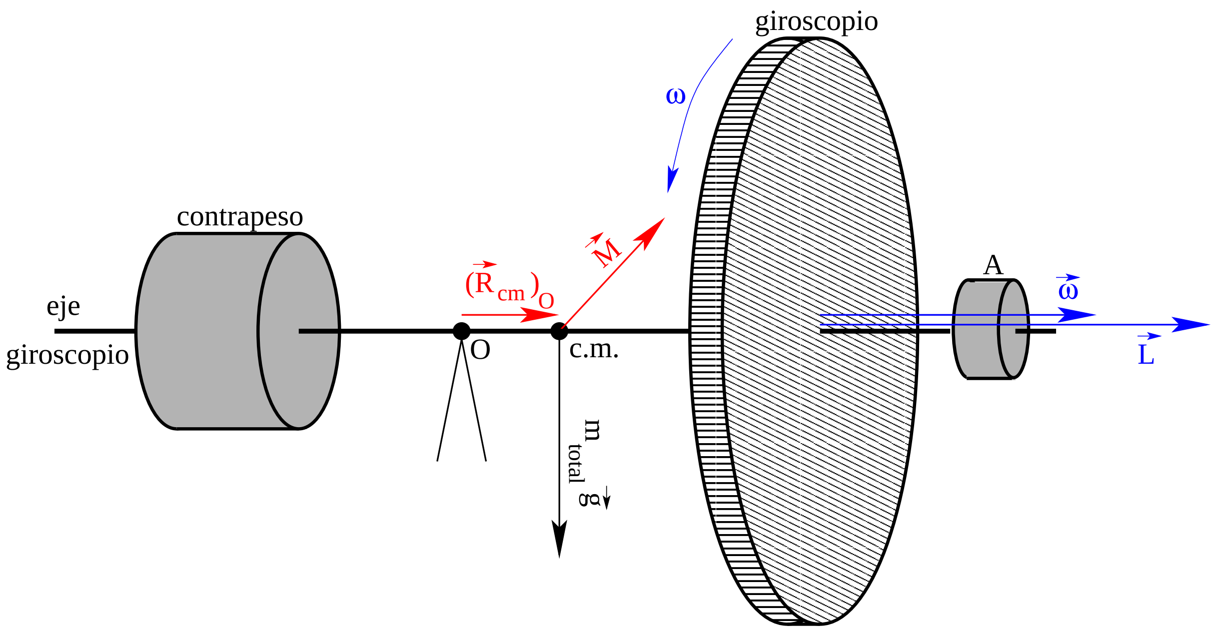
Nota que si, por ejemplo, el eje del giroscopio estuviera horizontal y girara en un plano paralelo al suelo (es decir, en torno a un eje vertical como el de la línea discontinua) a una velocidad angular Ω que fuera también grande, a pesar de que el momento de inercia del disco con respecto a este eje vertical es bastante menor que con respecto al eje horizontal, sí podría ocurrir que la componente del momento angular (que es el producto del momento de inercia y la velocidad angular) a lo largo de este eje vertical ya no fuera tan despreciable.

Resumiendo:

> *Para un disco de gran masa que rota en torno a un eje que pasa por su centro a gran velocidad angular ω y, suponiendo que el eje de este disoc como mucho gira en torno a un eje vertical a una velocidad angular Ω mucho más pequeña que ω, entonces se cumple (aproximadamente) que el momento angular del sistema es paralelo al eje del disco; y con ello es paralelo al vector velocidad angular $\vec{\omega}$.*

El porqué de insistir tanto en que el momento angular resulte ser paralelo al eje del giroscopio es algo que, si has entendido el final de la introducción de Mecánica en la sección anterior, ya te lo habrás supuesto: si el momento de las fuerzas exteriores resulta tener dirección perpendicular al eje del giroscopio (como así va a ser para el giroscopio), el módulo del momento angular del sistema va a permanecer constante al ser perpendicular también al momento angular.

Veamos que conclusiones se sacan de esta propiedad. En lo que sigue, la notación $\left(\vec{R}_{\text{cm}}\right)_O$ significa el vector de posición del centro de masas medido desde O. Mirando el siguiente dibujo vemos que si la función del contrapeso era "colocar" el centro de

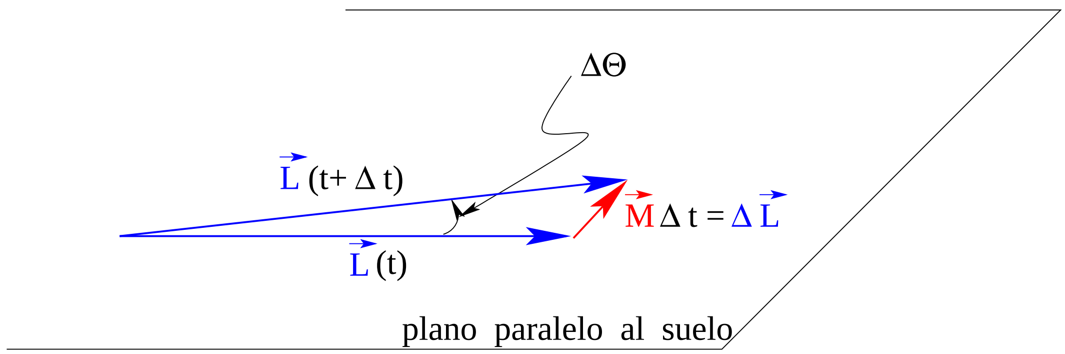


masas justo sobre el punto de apoyo fijo O, en el momento que coloquemos la pesa en el extremo junto al disco, este centro de masas se desplaza hacia la derecha, fuera del punto de apoyo. O lo que es lo mismo, el peso del sistema tiene momento con respecto al punto O. El momento de esta fuerza es $\vec{M} = \left(\vec{R}_{\text{cm}}\right)_O \times (m_{\text{total}}\vec{g})$ y su dirección y sentido aparecen en la figura. De aquí deducimos lo siguiente:

1. Lo primero es que el momento del peso con respecto al punto O peso (que es el único momento que actúa, ya que la fuerza normal que hay en el punto de apoyo O no tiene momento con respecto a tal punto) es perpendicular al momento angular si se cumplen las condiciones que hemos discutido más arriba. Por lo tanto, el

peso no es capaz de variar el módulo del momento angular, sino sólo su dirección o su sentido.

2. Lo segundo es que este momento del peso está contenido en un plano paralelo al suelo. Por lo tanto, y de acuerdo con la Ley de Newton para la dinámica de rotación $\vec{M} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$ (se sobreentiende en lo que resta que el momento de las fuerzas y el momento angular se miden con respecto a O), la variación $\Delta\vec{L} = \vec{M}\,\Delta t$ que va a poder producir este momento del peso, al cabo de un pequeño intervalo de tiempo Δt, va a ser una variación también contenida en este plano paralelo al suelo. En otras palabras, el momento angular va a cambiar tal y como se ve en la siguiente figura:



con

$$\vec{L}(t+\Delta t) - \vec{L}(t) = \Delta\vec{L} = \vec{M}\,\Delta t = \left(\vec{R}_{\text{cm}}\right)_O \times (m_{\text{total}}\vec{g})\,\Delta t\,. \tag{17}$$

Debe quedar claro (aunque en la figura por el efecto de la perspectiva no se vea bien) que, en módulo, $\vec{L}(t+\Delta t)$ y $\vec{L}(t)$ son iguales, como ya sabemos puesto que el momento del peso es perpendicular al momento angular.

Ahora ya podemos calcular el ángulo $\Delta\Theta$ que se va a desplazar el momento angular (y con él el eje del girosopio que está horizontal) debido al momento del peso: para un intervalo de tiempo Δt muy pequeño, de forma que $\Delta\Theta$ sea también muy pequeño (mejor dicho, infinitesimal), podemos aproximar el triángulo de la figura anterior a un sector de círculo de radio $\left|\vec{L}(t+\Delta t)\right| = \left|\vec{L}(t)\right|$ (igualdad que ya sabemos se cumple) y arco $\left|\vec{M}\right|\,\Delta t$. El ángulo $\Delta\Theta$ viene dado entonces por "arco / radio"

$$\Delta\Theta = \frac{\left|\vec{M}\right|\,\Delta t}{|\vec{L}|} = \frac{\left|\left(\vec{R}_{\text{cm}}\right)_O\right|\,m_{\text{total}}g}{L}\,\Delta t\,,$$

Así el ritmo con el que varía este ángulo con el tiempo, es decir, la velocidad angular con la que el eje del giroscopio (en torno al que está girando el disco) gira a su vez en torno a un eje vertical que pasa por O es igual a

$$\Omega_{\text{prec}} = \frac{\Delta\Theta}{\Delta t} = \frac{\left(R_{\text{cm}}\right)_O\,m_{\text{total}}g}{L} = \frac{\left(R_{\text{cm}}\right)_O\,m_{\text{total}}g}{\left(I_{\text{disco}}\right)_{\text{eje giroscopio}}\,\omega}\,, \tag{18}$$

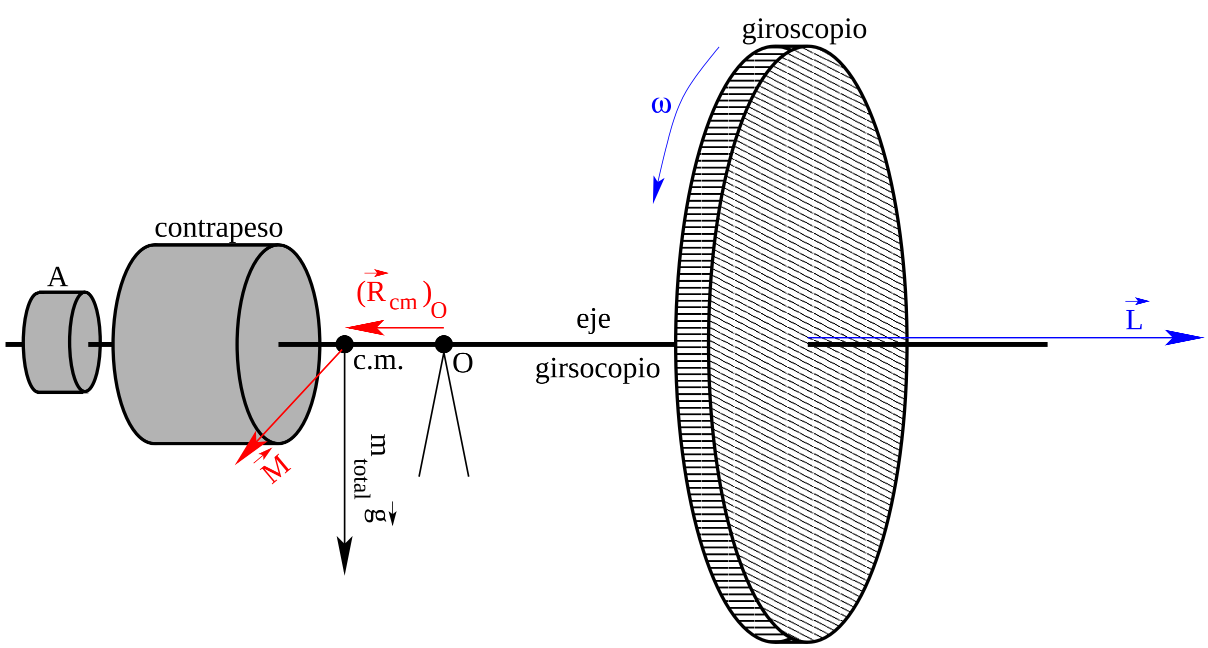
con $\left(I_{\text{disco}}\right)_{\text{eje giroscopio}}$ el momento de inercia del disco con respecto al eje del giroscopio.

Al desplazamiento, dentro de un plano paralelo al suelo, del extremo del eje del giroscopio se le llama *precesión*; y a la velocidad angular (18), velocidad angular de precesión. El sentido de esta precesión lo marca el sentido del momento del peso. De la fórmula obtenida se deduce que:

- Cuanto más se haya desplazado el centro de masas del punto de apoyo O, es decir, cuanto mayor sea $\left(R_{\text{cm}}\right)_O$, más rápidamente precede el giroscopio. Esto es algo que ya sabemos para el caso de una bicicleta: cuanto más nos inclinamos, y con ello más separamos nuestro centro de gravedad (el ombligo) de la vertical que pasa por el punto de contacto de la rueda con el suelo, más rápidamente podemos doblar una esquina.

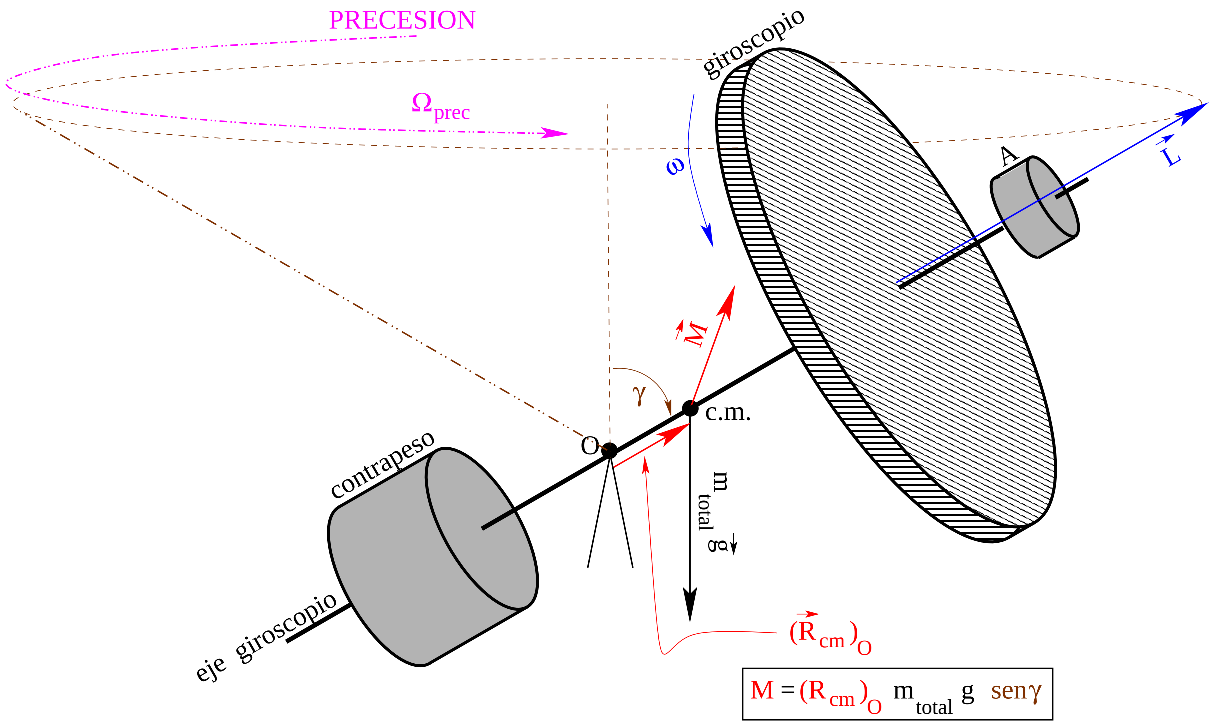
- Cuanto más rápido gira el disco en torno al eje del giroscopio (es decir, cuanto mayor es ω), más lenta es la precesión. Si alguna vez has jugado con una peonza (que no es otra cosa que un giroscopio) ya habrás observado que al final, cuando la peonza ya ha perdido bastante de su velocidad de giro sobre su eje de simetría, la peonza precede mucho más rápido que al inicio (cuando se dice que la peonza "está dormida").

Sin embargo aquí no se acaban las cosas curiosas que hace un giroscopio. La siguiente cuestión es fácil de responder: qué ocurre si, con el disco girando en torno al eje del giroscopio en el mismo sentido que antes, ahora la pesa A que desequilibra el eje la colocamos en el otro extremo del eje del giroscopio. En ese caso, el centro de masas se desplaza ahora hacia la izquierda, tal y como se ve en la siguiente figura, y el sentido



del momento del peso es hacia afuera de esta página. Puesto que es este momento el causante de la variación del momento angular, éste (junto con el eje del giroscopio) va a avanzar dentro del plano paralelo al suelo saliendo de esta página: el sentido de precesión va es el contrario al del caso cuando la pesa A estaba colocada en el extremo junto al disco.

Continuemos con otra "curiosidad". Hasta ahora hemos supuesto que el eje del giroscopio era paralelo al suelo. Si ahora este eje del giroscopio forma un ángulo γ distinto de 90 grados con la vertical, qué va a ocurrir cuando coloquemos la pesa A que desplaza el centro de masas fuera del punto de apoyo O. La respuesta es que el comportamiento no se va a diferenciar en nada de cuando el eje del giroscopio estaba horizontal. Como podemos ver en la siguiente figura, el momento del peso con respecto



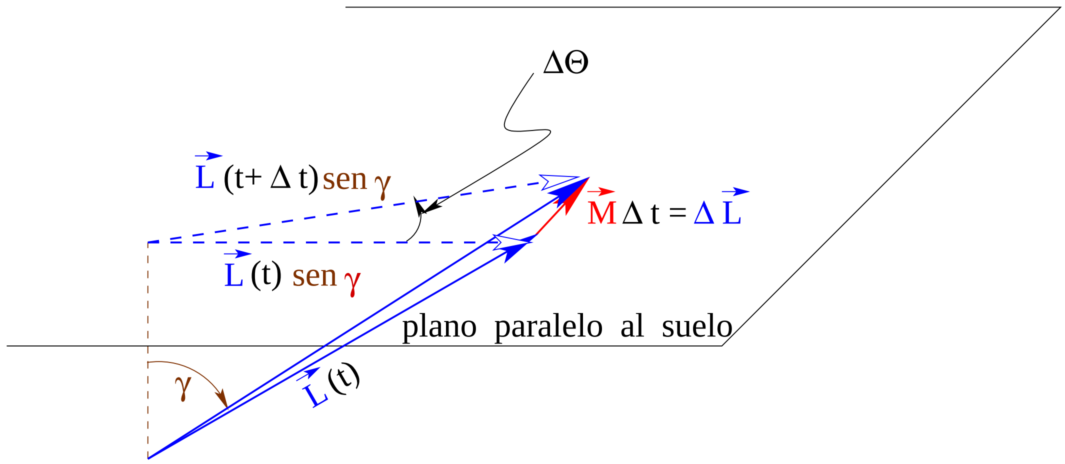
al punto de apoyo sigue siendo perpendicular al momento angular del giroscopio; y sigue estando contenido en un plano paralelo al suelo. El cambio del momento angular, que sólo es un cambio en dirección y por tanto es igual al cambio de dirección del eje del giroscopio, es trazar un cono cuya generatriz es el propio eje del giroscopio. La inclinación del eje del giroscopio no es modificada por el peso.

Calcular para este caso el ángulo $\Delta\Theta$ que avanza el eje del giroscopio debido al momento del peso es algo que se hace como en el caso cuando el eje del giroscopio estaba horizontal. Lo único es que ahora hay que tener en cuenta que el módulo del vector momento del peso depende también de la inclinación γ del eje del giroscopio

$$\left|\vec{M}\right| = \left|\left(\vec{R}_{\text{cm}}\right)_O\right| \, m_{\text{total}} g \ \text{sen}\,\gamma\,,$$

debido a la definición del momento de una fuerza (8) como producto vectorial. Con ello, y teniendo el cuenta el siguiente dibujo, se deduce el ángulo $\Delta\Theta$ que, en un plano paralelo al suelo, se desplaza o precede el eje del giroscopio al cabo de un tiempo Δt:

$$\Delta\Theta = \frac{\left|\vec{M}\right| \ \Delta t}{|\vec{L}|\ \text{sen}\,\gamma} = \frac{\left|\left(\vec{R}_{\text{cm}}\right)_O\right| \, m_{\text{total}} g \ \text{sen}\,\gamma}{L\,\text{sen}\,\gamma}\,\Delta t\,.$$



Y así la velocidad angular de precesión cuando el eje del giroscopio está inclinado es

$$\frac{\Delta\Theta}{\Delta t} = \frac{\left(R_{\text{cm}}\right)_O \, m_{\text{total}} g}{\left(I_{\text{disco}}\right)_{\text{eje giroscopio}} \; \omega}\,, \tag{19}$$

que es el mismo resultado que la velocidad angular de precesión (18) cuando el eje del giroscopio estaba horizontal. Luego la velocidad con la que se realiza la precesión es independiente de la inclinación que tenga el eje del giroscopio, inclinación que se mantiene durante la precesión.

4 Nutación del giroscopio

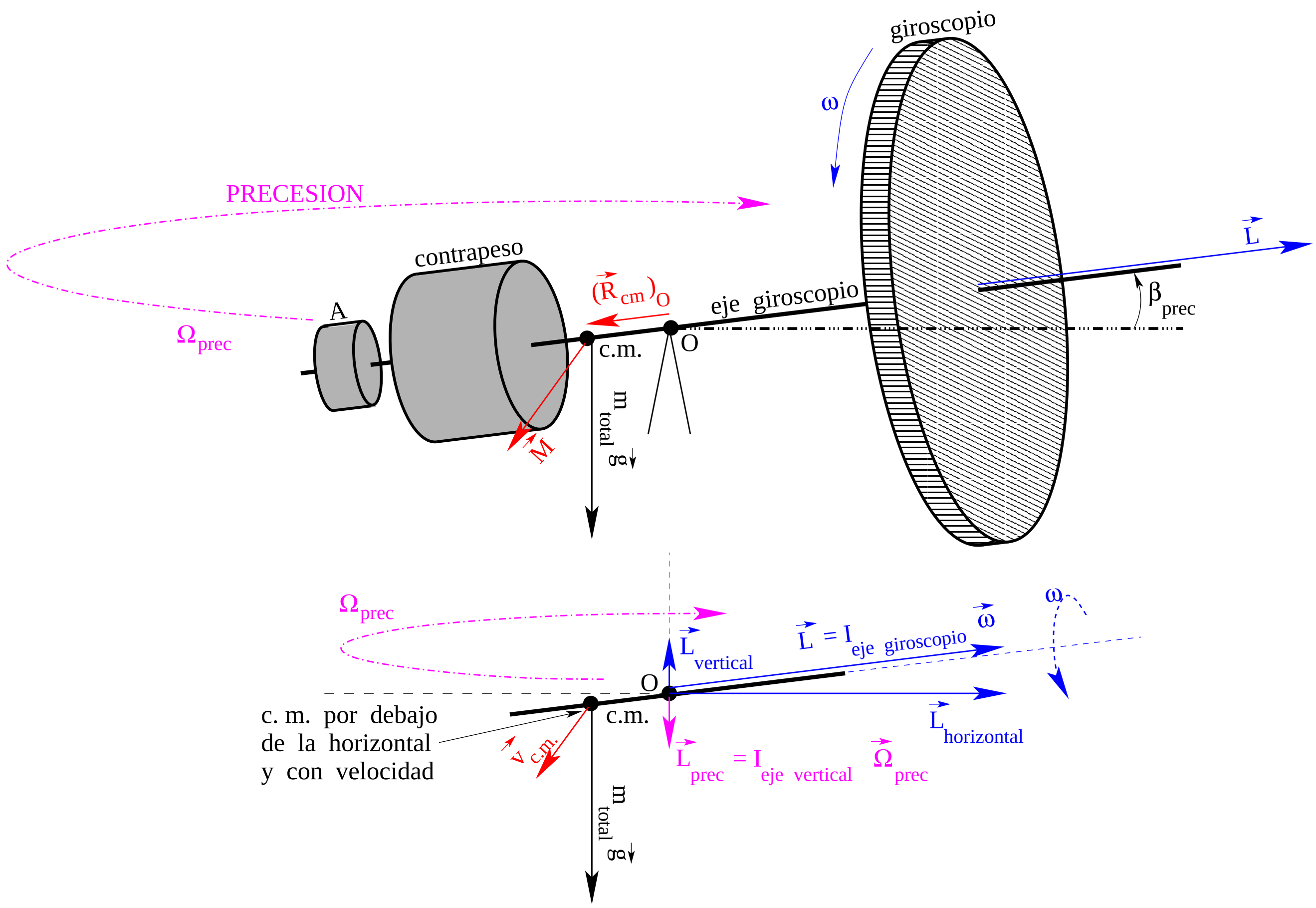
Volvamos a considerar el movimiento del giroscopio cuando su eje está horizontal. Lo que hemos visto es que inicialmente tenemos el giroscopio en equilibrio, es decir, con su centro de masas sobre el punto de apoyo O, girando sobre su eje que está horizontal; a continuación colocamos la pesa A que desequilibra al giroscopio llevando el centro de masas fuera del punto de apoyo, y por ello el peso tiene ahora momento con respecto a tal punto de apoyo. El efecto de este momento del peso es hacer que el eje del giroscopio preceda en un plano horizontal *sin cambiar su inclinación*. Quizás en la discusión anterior sobre la precesión hayas tenido la sensación de que hay algo que no termina de encajar: todos estamos acostumbrados a que el efecto de la gravedad cuando un sistema deja de estar en equilibrio es que se caiga hacia abajo. Y sin embargo el giroscopio no hace nada parecido (al menos a primera vista) sino que se desplaza horizontalmente.

Este es el problema: la energía cinética de rotación del giroscopio debida al giro del disco alrededor de su eje no varía cuando colocamos la pesa A y soltamos el giroscopio, puesto que el momento del peso es perpendicular al momento angular. Y sin embargo, después de soltarlo, el giroscopio precede, con lo que su energía cinética total ha aumentado en la cantidad debida a la traslación del centro de masas (que como recordarás al no estar sobre el punto de apoyo se mueve junto con el eje). La cuestión es de dónde ha salido esa energía “de más”.

El origen del problema no es la aproximación explicada en el cuadro de la página 11: la de que podemos despreciar cualquier componente del momento angular que no sea paralela al eje del giroscopio, siempre y cuando el disco del giroscopio sea grande y rote muy rápido. Esta aproximación está bien justificada.

Observemos otra vez con más detenimiento el movimiento de precesión del giroscopio cuando lo soltamos: el eje del giroscopio, que estaba horizontal cuando se sujetaba, *desciende* o *asciende* ligeramente al soltarlo. Este descenso/ascenso del eje siempre es de forma que descienda la pesa A que desequilibra al giroscopio; o lo que es lo mismo, de forma que el centro de masas del sistema (que está en el lado del eje donde se ha colocado la pesa A) pierda ligeramente en altura. Y además este ligero descenso del centro de masas se mantiene durante todo el movimiento de precesión (el cabeceo que también muestra el giroscopio a la vez que precede lo estudiaremos enseguida). Es precisamente lo que se pierde en energía potencial debido a la ligera bajada del centro de masas lo que se “invierte” en el aumento de energía cinética del sistema al obtener el centro de masas, con motivo de la precesión, una velocidad de traslación que no tenía inicialmente.

Luego la gravedad sí que hace descender, aunque sólo sea muy poco y al inicio, la pesa y el centro de masas. Este descenso no sólo es necesario para que la energía total del sistema se conserve, sino que además asegura que el momento angular en la dirección vertical — dirección en la que no hay ningún momento de fuerzas, ni siquiera el momento del peso actúa en tal dirección — se conserve también.



Inicialmente, cuando sujetamos el eje del giroscopio en posición horizontal, el momento angular está también en posición horizontal. Sin embargo, cuando el giroscopio precede, el sistema ha adquirido una velocidad angular en torno a un eje vertical que pasa por el punto de apoyo O: ha adquirido un momento angular en la dirección vertical. Por ejemplo, supongamos tal y como aparece en la figura anterior que la pesa A la hemos colocado en el extremo opuesto al disco, de forma que el movimiento de precesión es con el disco del giroscopio "saliendo" de la página hacia nosotros. El momento angular debido a la precesión (en color magenta) lleva dirección vertical y apunta hacia abajo (acuérdate de la regla de la mano derecha en la página 5). Si ahora el eje del giroscopio desciende ligeramente de forma que el centro de masas esté más abajo que la línea horizontal, entonces el momento angular debido al giro del disco sobre su eje (en color azul) apunta ligeramente hacia arriba. En otra palabras, el momento angular del disco tiene ahora una pequeña componente vertical hacia arriba que compensa al momento angular debido a la precesión. De esa forma, el momento angular total en la dirección vertical es cero, tal y como lo era antes de soltar el giroscopio.

De aquí podemos calcular el ángulo β_{prec} que desciende el centro de masas: cuando el momento angular, debido al giro del giroscopio en torno al eje del disco, asciende el pequeño ángulo β_{prec}, su componente vertical es igual a $L_{\text{vertical}} = L \operatorname{sen} \beta_{\text{prec}} \approx L\,\beta_{\text{prec}}$, usando que, para un ángulo muy pequeño, su seno se puede aproximar por el ángulo directamente. La componente horizontal del momento angular es prácticamente igual en módulo al momento angular completo, ya que $\cos \beta_{\text{prec}} \approx 1$: con ello, toda la discusión que se realizó en la sección anterior (en donde no se tenía en cuenta que el eje del giroscopio inicialmente horizontal podía inclinarse ligeramente) sigue siendo válida. Por lo tanto, igualando la componente vertical del momento del giro del disco con el momento angular que adquiere el giroscopio debido a la precesión

$$L_{\text{vertical}} = \left[\Big(I_{\text{disco}}\Big)_{\text{eje giroscopio}}\ \omega\right] \operatorname{sen} \beta_{\text{prec}} = L_{\text{prec}} = \Big(I_{\text{giroscopio}}\Big)_{\text{eje vertical por } O}\ \Omega_{\text{prec}}\,,$$

se obtiene el ángulo β_{prec}

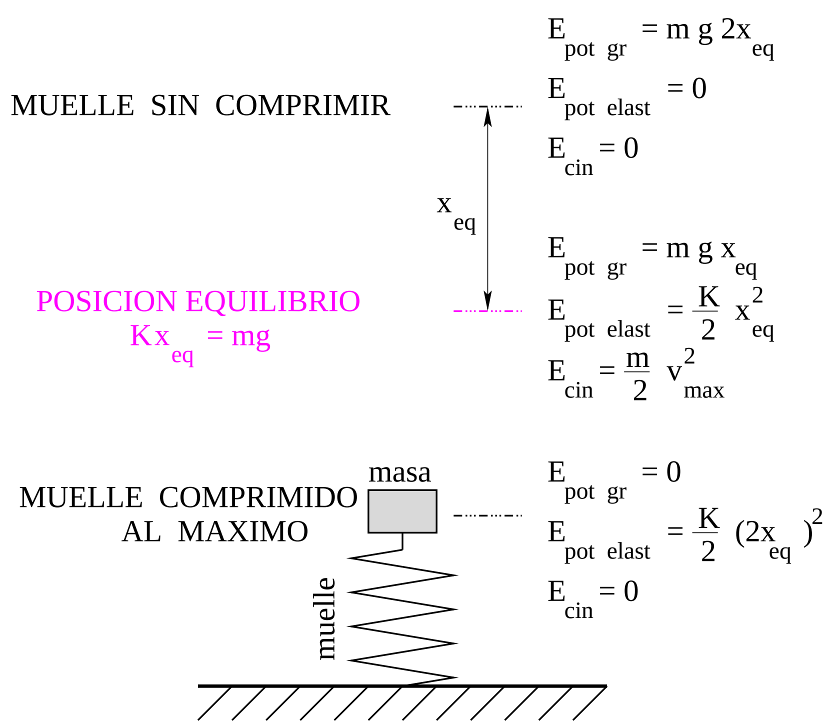
$$\beta_{\text{prec}} = \frac{\Big(I_{\text{giroscopio}}\Big)_{\text{eje vertical por } O}}{\Big(I_{\text{disco}}\Big)_{\text{eje giroscopio}}}\ \frac{\Omega_{\text{prec}}}{\omega} = \frac{\Big(I_{\text{giroscopio}}\Big)_{\text{eje vertical por } O}\ \Big(R_{\text{cm}}\Big)_O\ m_{\text{total}}\, g}{\left[\Big(I_{\text{disco}}\Big)_{\text{eje giroscopio}}\ \omega\right]^2}\,, \qquad (20)$$

donde $\Big(I_{\text{giroscopio}}\Big)_{\text{eje vertical por } O}$ es el momento de inercia del sistema con respecto al eje vertical que pasa por el punto de apoyo O. Vemos que, como era de esperar por como se mueve el giroscopio, la inclinación β_{prec} del eje del giroscopio inicialmente horizontal es muy pequeña: de acuerdo con la situación general para el giroscopio que hemos visto en el cuadro de la página 11, el momento de inercia del sistema con respecto al eje del disco, $\Big(I_{\text{disco}}\Big)_{\text{eje giroscopio}}$, es mucho mayor que con respecto a cualquier eje (incluido el vertical); y, además, la velocidad angular ω del disco es grande.

Esta pequeña inclinación del eje para hacer posible la precesión es independiente de la inclinación inicial que tenga el eje. Si antes de soltar el giroscopio, su eje forma un ángulo γ con la vertical tal y como se ve en la figura en la página 14, entonces cuando se suelte y empiece a preceder, el eje se inclinará el ángulo β_{prec} correspondiente — aunque la velocidad angular de precesión no depende de la inclinación inicial del eje del giroscopio, el momento de inercia $\Big(I_{\text{giroscopio}}\Big)_{\text{eje vertical por } O}$ sí que depende —, de forma que la inclinación del eje con respecto a la vertical será, durante la precesión, $\gamma + \beta_{\rm prec}$ o $\gamma - \beta_{\rm prec}$, dependiendo de si la pesa A se coloca junto al disco o en el extremo opeusto.

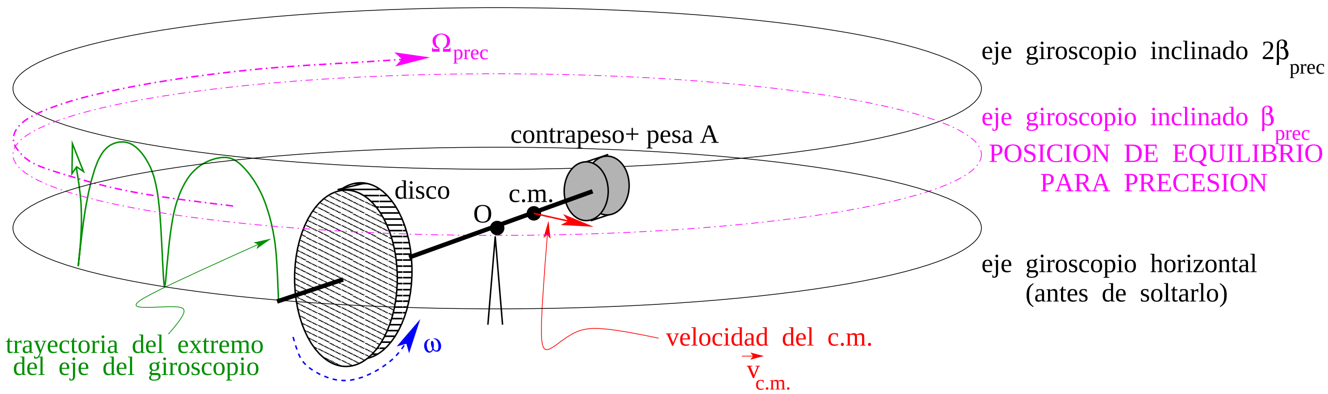
Y finalicemos ya el estudio del giroscopio. La precesión no es el único movimiento que realiza un giroscopio, cuyo disco está girando a gran velocidad cuando se desequilibra al centro de masas desplazándolo fuera del punto de apoyo O fijo. En general, superpuesto al movimiento de precesión, el giroscopio muestra un movimiento de cabeceo que se denomina *nutación*.

La explicación de la nutación tiene mucho que ver con lo que acabamos de ver, sobre la necesidad de que el centro de masas descienda un poco para poder dar cuenta así de la velocidad de traslación que adquiere el centro de masas debida a la precesión. Tomemos el caso en que la pesa A está colocada en el extremo opuesto al eje (ver figura en pág. 16). Inicialmente el eje del giroscopio está horizontal, pero ya sabemos por la discusión anterior que la posición de equilibrio para la precesión es con el eje inclinado un ángulo $\beta_{\rm prec}$ (20). Luego, en cuanto soltemos el eje, éste va a empezar a subir para alcanzar tal inclinación. Sin embargo, al alcanzarla, el eje lleva cierta velocidad hacia arriba, y no puede parar instantáneamente, con lo que continúa el movimiento hacia arriba, pero esta vez frenándose ya que ha superado la inclinación $\beta_{\rm prec}$ de equilibrio para la precesión. Una vez se pare, está a una inclinación demasiado grande, con lo que empieza a bajar, pasa por la inclinación de equilibrio a una velocidad distinta de cero, y continúa hasta que el eje del giroscopio queda horizontal. Y así sucesivamente.



Esto recuerda mucho al movimiento de un muelle sin masa y de constante elástica K al que se le coloca encima una masa m: el tipo de movimiento, que es armónico simple si lo que se comprime el muelle no es mucho, está representado en la figura de arriba, junto con la energía potencial gravitatoria, potencial elástica y la energía cinética. La posición de equilibrio, a la que va a tender el movimiento si hay alguna amortiguación debida a rozamientos, es aquella en la que el peso de la masa queda equilibrado por la fuerza del muelle comprimido.

En el caso del giroscopio, a la vez que el extremo del eje realiza el cabeceo o nutación que acabamos de describir (y que puede estar amortiguado de haber rozamientos en la articulación del punto de apoyo O), el eje además realiza el movimiento de precesión. La composición de ambos movimientos precesión+nutación hace que el extremo del eje del giroscopio trace una trayectoria que se llama *cicloide* y está representada en la siguiente figura. La (pequeña) amplitud del movimiento de nutación es el ángulo $\beta_{\rm prec}$ (20).



La amplitud de la nutación se puede además controlar. El origen de tal amplitud es la necesidad de ajustar la inclinación del eje del giroscopio para que así el centro de masas, que inicialmente estaba en reposo, tenga en el plano paralelo al suelo la velocidad de traslación que le corresponde por la precesión del eje del giroscopio alrededor de un eje vertical que pasa por el punto de apoyo O. Por ello, basta que cuando liberemos el giroscopio, en vez de soltarlo a secas, le demos un pequeño empujón en el sentido que va a tener en la precesión, y así el centro de masas adquiere por el empujón la velocidad de traslación requerida y no necesita inclinar ligeramente el eje. Y con ello, se reduce la nutación; el eliminarla por completo requiere que se "acierte" en el empujón que hay que darle inicialmente al eje. Por el contrario, si al soltar el eje del giroscopio le damos el empujón en el sentido contrario al que va a tener la precesión, entonces el eje debe inclinarse no sólo para darle al centro de masas la velocidad de traslación que ya precisaba sin empujón, sino que además esta inclinación deberá ser todavía mayor para compensar el empujón inicial en el sentido equivocado.

5 A modo de conclusión

Si has llegado hasta aquí entendiendo las ideas principales, habrás aprendido uno de los sistemas más complicados de describir en la Mecánica Clásica. Más complicados a la vez que más interesantes. Lo curioso es que toda esta discusión es algo que sin darte cuenta ya observaste de pequeño al aprender a andar en bicicleta: que cuanto más rápido giran las ruedas, más estabilidad se tiene sobre la bicicleta y más difícil es caerse aun cuando nos inclinemos hacia un lado para tomar una curva.

Como despedida, la siguiente tabla te servirá para fijar las ideas más importantes de todo lo que hemos visto:

1. El momento de una fuerza externa que sea perpendicular al momento angular de un sistema de partículas no varía el módulo de este momento angular *sólo si* el vector momento angular es paralelo al vector velocidad angular; sin embargo este "ser paralelo" no ocurre siempre, ya que el momento de inercia, que es lo que relaciona el momento angular con la velocidad angular, no es en general un número sino una matriz: $\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{zz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$.

2. Un giroscopio es un sistema en el que el momento de inercia con respecto a un cierto eje de simetría es mucho mayor que con respecto a cualquier otro eje. Si en torno a este eje de simetría el giroscopio está girando a gran velocidad, entonces la inclinación que tiene ese eje con respecto al suelo no cambiará prácticamente, incluso si el centro de gravedad del sistema ya no está colocado justo en la vertical del punto de apoyo con el suelo. Este "no estar el centro de gravedad en la vertical sobre el punto de apoyo" hace preceder el eje de giro del giroscopio, pero sin hacerlo caer al suelo.

3. En realidad el eje del giroscopio no mantiene exactamente la inclinación con el suelo cuando se suelta sino que el eje desciende o asciende un poco, siempre haciendo que el centro de gravedad del sistema (que está fuera del punto de apoyo) descienda un poco. Y es precisamente esta pequeña variación en la altura del centro de gravedad lo que asegura la precesión: la disminución en energía potencial del sistema debida al descenso del centro de gravedad es la fuente para el aumento en energía cinética del sistema que supone que el giroscopio empiece a preceder.

4. La precesión no es el movimiento más general que presenta el giroscopio cuando su centro de gravedad no está sobre el punto de apoyo. Acompañando a la precesión hay generalmente un movimiento de cabeceo o nutación, que es el resultado de que el eje del giroscopio intente alcanzar la ligera inclinación necesaria para que el centro de gravedad del sistema adquiera la velocidad de traslación debida a la precesión. La amplitud de esta nutación se puede modificar dando al centro de masas una velocidad inicial de traslación.

Y no te olvides de que todos vivimos sobre un gigantesco giroscopio que es la Tierra: el hecho de que la Tierra no sea completamente indeformable hace que, al girar sobre su eje, se achate por los polos y se ensanche por el ecuador. Con ello el momento de inercia con respecto al eje alrededor del que la Tierra gira sobre sí misma es mayor que con respecto a los otros ejes. Y con ello el momento angular (producto del momento de inercia por la velocidad angular) respecto a tal eje es muy grande: ya tenemos montado un giroscopio. Y las propiedades del giroscopio son las responsables de la estabilidad del eje de la Tierra, que tiene una inclinación de $\gamma = 23.5°$ con respecto a la perpendicular al plano de la eclíptica (éste es el plano en donde la Tierra realiza su movimiento de traslación alrededor del Sol, y es el plano que juega aquí el mismo papel que el plano del suelo para el giroscopio estudiado más arriba): este eje de la Tierra permanece con la misma inclinación siempre. El efecto de la atracción gravitatoria del Sol y de la Luna sobre nuestro planeta-giroscopio es hacer que el eje de rotación de la Tierra preceda, o sea trace un cono como el de la figura en la página 14 sobre el fondo de las estrellas fijas del firmamento. Con otras palabras: si observamos la misma constelación todos los años en una fecha determinada, veremos que tal constelación se ha desplazado ligeramente con respecto al año anterior. El tiempo que el eje de la Tierra tarda en hacer una precesión completa es de 25800 años. Este efecto ya fue descubierto por el astrónomo caldeo Cidenas al final del imperio persa, en el año 343 antes de Cristo.