

Descarga del contenido de esta página aquí: apretando la tecla derecha del ratón sobre el enlace subrayado, elegir “Guardar enlace como” (Netscape) o “Guardar objetivo como” (Explorer).

Para usuarios de Linux, el archivo se puede abrir con el programa GhostView: escribir **gv ol_truco.pdf &** o bien **kghostview ol_truco.pdf &** en una consola de texto. Para usuarios de Windows, el archivo se abre con el programa Acrobat Reader clicando directamente sobre el icono del archivo.

PREPARACIÓN PARA LAS OLIMPIADAS NACIONALES DE FÍSICA

REPASO DE MECÁNICA

Tengamos un cuerpo con dimensiones, es decir, un sistema formado por varias masas puntuales. Si consideramos dos instantes de tiempo diferentes t_1 y t_2 *muy poco separados* entre sí, se cumple que

$$\Delta \vec{p}_{c.m.} = \vec{p}_{c.m.,2} - \vec{p}_{c.m.,1} \approx (t_2 - t_1) \sum \vec{F}_{\text{externa}}, \quad (1)$$

donde $\sum \vec{F}_{\text{externa}}$ es la suma de todas las fuerzas externas al sistema; $\vec{p}_{c.m.}$ es el momento lineal (o impulso) del centro de masas de todo el sistema y viene dado por la masa total del sistema multiplicada por la velocidad que lleva el centro de masas

$$\vec{p}_{c.m.} = m_{\text{total}} \vec{v}_{c.m.}. \quad (2)$$

Si en vez de varias masas puntuales formando un cuerpo con dimensiones tenemos una única masa puntual, entonces el centro de masas coincide con la masa puntual.

Volviendo a la ecuación (1), si $t_1 \approx t_2$ (por ejemplo, consideramos el instante *justo antes* y *justo después* de un choque que no dura prácticamente nada de tiempo), entonces se cumple $\vec{p}_{c.m.,2} \approx \vec{p}_{c.m.,1}$, es decir, el momento lineal del centro de masas se conserva. Evidentemente, el momento lineal también se conserva independientemente de lo cercano que esté t_1 de t_2 si $\sum \vec{F}_{\text{externa}} = \vec{0}$.

Si además de desplazarse el cuerpo también rota, por ejemplo en torno a un punto O , entonces además de (1) se cumple que para dos instantes t_1 y t_2 *muy poco separados* entre sí

$$\Delta(\vec{L})_O = (\vec{L})_{O,2} - (\vec{L})_{O,1} \approx (t_2 - t_1) \sum (\vec{M}_{\text{externo}})_O, \quad (3)$$

donde $(\vec{L})_O$ es el momento angular del sistema, medido con respecto a O , y $(\vec{M}_{\text{externo}})_O$ es el momento de una fuerza externa medido también con respecto a O . Como cuando se trabaja con momentos angulares y momentos de fuerzas es fundamental indicar con respecto a qué punto O se están calculando estos momentos, utilizaremos para lo que sigue la notación $(\)_O$ para indicarlo.

El momento angular de una partícula (=masa puntual) con respecto a un punto O se define como el producto vectorial del vector de posición de la partícula visto desde O por el momento lineal que lleva la partícula, $(\vec{r})_O \times \vec{p}$. En el caso de un sistema de

partículas, el momento angular es la suma de los momentos angulares de cada una de las partículas; y si además se cumple que el cuerpo es rígido (=no deformable) entonces se puede demostrar que $(\vec{L})_O$ se puede escribir también de la siguiente forma

$$(\vec{L})_O = (I)_O \vec{\omega}, \quad (4)$$

donde $\vec{\omega}$ es la velocidad angular (su dirección marcada por el pulgar extendido de la mano derecha cuando se ponen el resto de los dedos plegados en la dirección de giro); $(I)_O$ es el momento de inercia del sistema de partículas con respecto al punto O y viene definido como la suma sobre todas las partículas del cuadrado de la distancia de cada partícula a O multiplicado por su masa

$$(I)_O = \sum_{\text{part. } i} m_i (r_i)_O^2.$$

Para una única partícula de masa m , su momento de inercia es $(I)_O = m (r)_O^2$; y por ejemplo para un disco macizo de masa m y radio R que está girando en torno a un eje perpendicular al centro del disco O , entonces $(I)_O = \frac{1}{2}mR^2$.

En la ecuación (3), el momento $(\vec{M})_O$ de una fuerza $\vec{F}$ respecto a un punto O está definido por el producto vectorial

$$(\vec{M})_O = (\vec{r})_O \times \vec{F}, \quad (5)$$

siendo $(\vec{r})_O$ el vector de posición que va desde el punto O hasta el punto de aplicación de la fuerza $\vec{F}$. Las ecuaciones de la mecánica con las que estamos trabajando “funcionan” siempre y cuando las medidas y cálculos se hagan con respecto a un sistema **inercial**, es decir, con respecto a un observador que no esté sometido a ninguna aceleración, que no esté sometido a ninguna fuerza resultante. Si no es así, las ecuaciones dejan de ser válidas (la única forma de hacer que entonces las ecuaciones todavía funcionen es introduciendo fuerzas ficticias como la fuerza de inercia o la centrífuga). Por ello en las ecuaciones (3) y (5), el punto de referencia O tiene que ser un punto no sometido a ninguna aceleración. Hay una **excepción** a esta regla: por la propia definición del **centro de masas**, las ecuaciones (3) y (5) siguen siendo válidas si O corresponde al centro de masas, aunque éste sea una punto que lleve aceleración.

Volviendo a la ecuación $\Delta(\vec{L})_O = (\vec{L})_{O,2} - (\vec{L})_{O,1} \approx (t_2 - t_1) \sum (\vec{M}_{\text{externo}})_O$, se siguen los mismos comentarios que para la ecuación (1): si $t_1 \approx t_2$ entonces el momento angular se conserva: $(\vec{L})_{O,2} \approx (\vec{L})_{O,1}$. O bien es válido en general $(\vec{L})_{O,2} = (\vec{L})_{O,1}$ si, independientemente de lo cerca o lejos que esté t_1 de t_2 , se cumple $\sum (\vec{M}_{\text{externo}})_O = \vec{0}$.

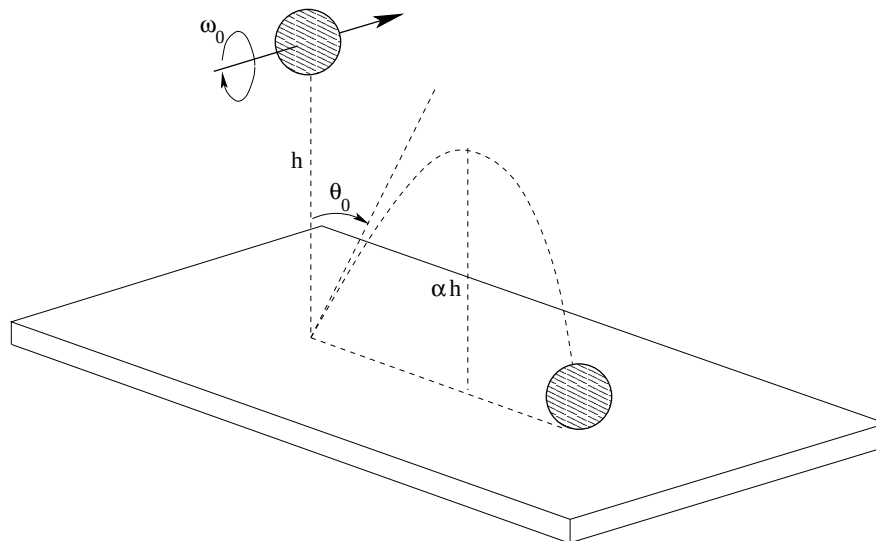
Aparte de todo esto, y para terminar, siempre se cumple que la variación de la energía mecánica entre dos puntos es igual al trabajo realizado por las fuerzas no conservativas, esto es, fuerzas del tipo de rozamientos o donde entran motores que están emitiendo calor a medida que hacen trabajo (es decir, todos los motores):

$$\Delta E_{\text{mecánica}} = (E_{\text{cin}} + E_{\text{pot}})_{\text{punto B}} - (E_{\text{cin}} + E_{\text{pot}})_{\text{punto A}} = W_{\text{roz, motores}}, \quad (6)$$

donde la energía cinética E_{cin} es la suma de la energía cinética de traslación del centro de masa más la energía cinética de rotación, si la hay; y la energía potencial E_{pot} es la suma de la energía potencial gravitatoria más la electrostática (debida a una carga eléctrica dentro de un campo eléctrico) y más la elástica (debida al estiramiento elástico de un muelle).

Ejemplo: Aplicación de todo lo anterior a un problema de la Olimpiada Internacional de Física celebrada en 1991 en La Habana.

Una bola de masa uniforme m y radio R está inicialmente girando en torno a su centro de masas con una velocidad angular constante ω_0 ; el centro de masas está quieto quedando el punto más bajo de la bola a una altura h sobre el suelo (ver la figura).



A continuación se deja caer la bola, rebota en el suelo y sube hasta una altura αh . Se supone que la bola no se deforma en el choque (esto es, que es un cuerpo rígido), y se da como dato del problema que el coeficiente de rozamiento dinámico entre la bola y el suelo es μ . El momento de inercia de una bola con respecto a un eje que pasa por el centro de masa es $I = \frac{2}{5}mR^2$. Puesto que la dirección en la que sale la bola después del choque no es la misma que en la que ha caído, y ya que hay fuerzas externas a la bola durante todo el choque, es claro que este choque ha durado un intervalo de tiempo que *no* es despreciable.

Se pide lo siguiente:

- Suponiendo que la bola roza *deslizando* durante todo el tiempo que dura la interacción con el suelo, calcular el valor del ángulo θ_0 . Para este caso, por tanto, no hay ninguna relación directa entre la velocidad de rotación de la bola y la velocidad de desplazamiento de su centro de masas.
- Suponiendo ahora que el rozamiento deslizante acaba antes de que empiece a elevarse la bola del suelo, volver a calcular θ_0 . En este caso, cuando la bola justo antes de dejar el suelo sí que está rodando sin deslizar y por lo tanto sí que hay una

relación directa entre la velocidad de rotación después del choque y la velocidad de desplazamiento horizontal del centro de masas.

Solución: Mientras cae todos los puntos de la bola llevan aceleración y por tanto, los cálculos que hagamos sobre momentos angulares los referiremos al centro de masas. Puesto que durante la caída la única fuerza que actúa sobre la bola es su peso, y esta fuerza no tiene momento respecto del centro de masas (ya que está aplicada justamente en el centro de masas), entonces de acuerdo con (3) se cumple

$$\sum (\vec{M}_{\text{externo}})_O = \vec{0} \Rightarrow (\vec{L})_{\text{c.m.}} \equiv (I)_{\text{c.m.}} \vec{\omega} = \text{const}, \quad (7)$$

o lo que es lo mismo, la velocidad angular permanece constante en módulo y sentido durante toda la caída (el momento de inercia I no cambia al ser una bola rígida). Para saber con qué velocidad llega el centro de masas al suelo justo antes del choque emplearemos la conservación de la energía mecánica:

$$\underbrace{\frac{1}{2} (I)_{\text{c.m.}} \omega_0^2}_{\text{cinética de rotación}} + 0 + mgh = \underbrace{\frac{1}{2} (I)_{\text{c.m.}} \omega_0^2}_{\text{cin. de rotación}} + \underbrace{\frac{1}{2} m v_{\text{c.m., antes}}^2}_{\text{cin. de traslación}} + 0,$$

de donde se obtiene

$$v_{\text{c.m., antes}} = \sqrt{2gh}. \quad (8)$$

Durante el intervalo de tiempo Δt que dura la interacción con el suelo, la fuerza vertical de reacción del suelo (=la normal) hace que la componente vertical de la velocidad del c.m. varíe de acuerdo con la ecuación (1)

$$N = \frac{m(v_{\text{c.m., después}})_y - (-m v_{\text{c.m., antes}})}{\Delta t}, \quad (9)$$

mientras que la fuerza de rozamiento cambia la velocidad horizontal del centro de masas (la bola “empuja” al suelo hacia atrás y el suelo responde “empujando” a la bola hacia adelante)

$$F_{\text{roz}} = \mu N = \frac{m(v_{\text{c.m., después}})_x - 0}{\Delta t'}, \quad (10)$$

siendo $\Delta t'$ el tiempo que dura este rozamiento dinámico (=deslizante). En general $\Delta t'$ no tiene por qué ser igual al tiempo Δt que dura la interacción con el suelo: sencillamente, la velocidad inicial de rotación de la bola podía haber sido tan baja que al poco de empezar la interacción con el suelo, el punto de contacto de la bola con el suelo (punto que lleva una velocidad hacia adelante igual a $(v_{\text{c.m.}})_x$ más una velocidad hacia atrás debida a la rotación) llegara a tener una velocidad cero, y en este caso empezamos a tener una rodadura sin deslizamiento.

De las fuerzas que actúan sobre la bola durante el choque sólo la fuerza de rozamiento tiene momento con respecto al centro de masas (la fuerza normal apunta hacia c.m. y por tanto su momento es cero): este momento vale $R F_{\text{roz}}$ y va en sentido contrario a la

velocidad angular (recordar que $\vec{F}_{\text{roz}}$ apunta hacia adelante), por lo que a partir de (3) obtenemos

$$-RF_{\text{roz}} = \frac{\left(I\right)_{\text{c.m.}} \omega_{\text{después}} - \left(I\right)_{\text{c.m.}} \omega_0}{\Delta t'} . \quad (11)$$

Por último, nos queda relacionar la velocidad de desplazamiento del centro de masas justo después del choque con la altura αh que alcanza la bola. Esto se hace de la misma forma que para el resultado (8): durante la subida, la única fuerza que actúa sobre la bola es su peso, fuerza que no tiene momento respecto del c.m. (luego la velocidad angular se conserva durante la subida) y que al actuar sólo en la dirección vertical sólo modifica la componente vertical de la velocidad del centro de masas:

$$\begin{aligned} E_{\text{mec, abajo}} &= \underbrace{\frac{1}{2} \left(I\right)_{\text{c.m.}} \omega_{\text{desp}}^2}_{\text{cin. de rotación}} + \underbrace{\frac{1}{2} m \left((v_{\text{c.m., desp}})_x^2 + (v_{\text{c.m., desp}})_y^2 \right)}_{\text{cin. de traslación}} + 0 = \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \left(I\right)_{\text{c.m.}} \omega_{\text{desp}}^2}_{\text{cin. de rotación}} + \underbrace{\frac{1}{2} m (v_{\text{c.m., desp}})_x^2}_{\text{cin. de traslación}} + m g \alpha h = E_{\text{mec, arriba}} , \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$(v_{\text{c.m., desp}})_y = \sqrt{2g\alpha h} . \quad (12)$$

$$\text{Ahora ya sólo obtener } \tan \theta_0 = \frac{(v_{\text{c.m., desp}})_x}{(v_{\text{c.m., desp}})_y} .$$

- Para el primer caso en que durante todo el tiempo Δt de interacción de la bola con el suelo el rozamiento ha sido deslizando y por tanto $\Delta t = \Delta t'$, combinando resultados (10) y (9) con (12) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{F_{\text{roz}}}{N} = \mu &= \frac{(v_{\text{c.m., desp}})_x}{(v_{\text{c.m., desp}})_y + v_{\text{c.m., antes}}} , \\ (v_{\text{c.m., desp}})_x &= \mu \left(\sqrt{2g\alpha h} + \sqrt{2gh} \right) , \end{aligned} \quad (13)$$

y así

$$\tan \theta_0 = \frac{(v_{\text{c.m., desp}})_x}{(v_{\text{c.m., desp}})_y} = \frac{\mu(\sqrt{\alpha} + 1)}{\sqrt{\alpha}} . \quad (14)$$

Si además queremos calcular $\omega_{\text{después}}$, basta con combinar (11) y (10) con (13)

$$\begin{aligned} \frac{-RF_{\text{roz}}}{F_{\text{roz}}} = -R &= \frac{\left(I\right)_{\text{c.m.}} (\omega_{\text{desp}} - \omega_0)}{m(v_{\text{c.m., desp}})_x} = \frac{\frac{2}{5} m R^2 (\omega_{\text{desp}} - \omega_0)}{m \mu (\sqrt{2g\alpha h} + \sqrt{2gh})} , \\ \omega_{\text{desp}} &= \omega_0 - \frac{5\mu}{2R} \sqrt{2g\alpha h} (\sqrt{\alpha} + 1) . \end{aligned} \quad (15)$$

- Para el segundo caso $\Delta t > \Delta t'$ y por lo tanto no podemos operar como en (13) y de la ecuación (9) no podemos despejar Δt . Sin embargo sí sabemos que en el momento en que la bola despegas del suelo ésta está rodando sin deslizar, y por definición de rodadura, la velocidad de giro en torno al centro masas, ω_{desp} , y la velocidad de desplazamiento horizontalmente sobre el suelo del centro de masas, $(v_{\text{c.m., desp}})_x$, están relacionadas entre sí mediante la ecuación

$$(v_{\text{c.m., desp}})_x = R\omega_{\text{desp}}. \quad (16)$$

A partir de las ecuaciones (11) y (10)

$$\begin{aligned} \frac{-RF_{\text{roz}}}{F_{\text{roz}}} = -R &= \frac{(I)_{\text{c.m.}}(\omega_{\text{desp}} - \omega_0)}{m(v_{\text{c.m., desp}})_x} = \frac{\frac{2}{5}mR((v_{\text{c.m., desp}})_x - R\omega_0)}{m(v_{\text{c.m., desp}})_x}, \\ (v_{\text{c.m., desp}})_x &= \frac{2}{7}R\omega_0, \end{aligned} \quad (17)$$

y puesto que la solución $(v_{\text{c.m., desp}})_y = \sqrt{2g\alpha h}$ se sigue cumpliendo ya que se obtuvo a partir de la conservación de la energía después del choque, obtenemos entonces

$$\tan \theta_0 = \frac{(v_{\text{c.m., desp}})_x}{(v_{\text{c.m., desp}})_y} = \frac{2}{7} \frac{R\omega_0}{\sqrt{2g\alpha h}}. \quad (18)$$

TRUCOS PARA LOS PROBLEMAS EXPERIMENTALES

Antes de empezar, un par de aproximaciones útiles para los problemas tanto teóricos como experimentales: cuando $x \ll a$ se cumple que

$$(a + x)^k \approx a^k + ka^{k-1}x,$$

siendo este resultado válido para cualquier k . Si x está medido en radianes, entonces se cumple que

$$1 - \cos x \approx \frac{x^2}{2},$$

cuando x es pequeño en comparación con 1 radián.

Ahora los trucos para los problemas experimentales: supongamos que tenemos una variable F en función de otra variable z , siendo la dependencia entre ambas de la forma

$$F = Az^k, \quad (19)$$

con A y k dos *constantes* desconocidas. Además nos dan una tabla de datos con los valores de z y los correspondientes valores de F , y nos piden hallar A y k . Esto se

hace de la siguiente forma: tomando el logaritmo (decimal o neperiano, da igual) de la ecuación (19) obtenemos

$$\log F = \log A + k \log z. \quad (20)$$

Si ahora representamos en papel milimetrado $\log F$ en el eje vertical y $\log z$ en el eje horizontal, puesto que $\log F$ es directamente proporcional a $\log z$ (como se ve en la ecuación (20)), lo que obtenemos es una **recta** de pendiente k (es decir, midiendo el ángulo que forma la recta con el eje horizontal, su tangente es igual a k) y de ordenada en el origen $\log A$ (es decir, midiendo sobre la gráfica a qué altura corta la recta al eje vertical para $\log z=0$, obtendremos $\log A$).

Suponiendo que el exponente k de la ecuación (19) ya lo conociéramos de antemano, otra forma de hallar la constante A es la siguiente: representamos en el eje vertical el valor de F y en el eje horizontal el valor de z^k . Puesto que F es directamente proporcional a z^k , la gráfica resultante vuelve a ser una recta, que pasa esta vez por el origen y que tiene una pendiente que es precisamente A . Este método puede aplicarse a un caso un poco más general

$$F = A z^k + B, \quad (21)$$

con A y B constantes desconocidas pero con el exponente k conocido. Representando F en el eje vertical y z^k en el eje horizontal, volvemos a obtener una recta de pendiente A y ordenada en el origen igual a B (es decir, la altura donde la recta corta al eje vertical para $z=0$ nos da directamente B). Date cuenta que si k lo desconociéramos, en la ecuación (21) ya no podríamos aplicar el procedimiento de tomar logaritmos, ya que el logaritmo de una suma no se puede separar en términos más sencillos.

Ejemplo: como ya habrás visto, en todos los casos se trata de ingeniárselas y buscar qué es lo que hay que representar en cada eje para que la gráfica resultante salga una recta, de la que así podemos leer fácilmente la pendiente y la ordenada en el origen. Supongamos que nos dieran los datos de F y de z y que además nos dijeran que estos datos responden a la ecuación

$$F = A z^2 + B z^5,$$

y ahora nos pidieran que con esos datos halláramos A y B . La forma de resolverlo es bien fácil: si escribimos

$$\frac{F}{z^2} = A + B (z^3), \quad (22)$$

y representamos en el eje vertical $\frac{F}{z^2}$ y en el eje horizontal z^3 , entonces la gráfica será una recta, de acuerdo con la ecuación (22). Y la pendiente de tal recta será B , mientras que la ordenada en el origen será A .