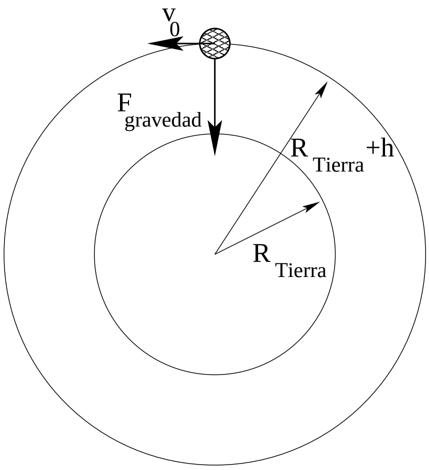
SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS EN EL DISTRITO UNIVERSITARIO DE LA RIOJA PARA LA FASE LOCAL DE LA XIV OLIMPIADA ESPAÑOLA DE FÍSICA

1 Problema 1

a) La fuerza externa que actúa sobre la nave es sólo la de la atracción gravitatoria terrestre, que según la Ley de Newton viene dada por $G\dfrac{M_{\mathrm{Tierra}}m_{\mathrm{nave}}}{(R_T+h)^2}$, siendo (R_T+h) la distancia entre la nave y el centro de la Tierra. La dirección de esta fuerza es central, esto es, apuntando hacia el centro de la Tierra, y por tanto es perpendicular a la trayectoria circular de la nave: por ello, esta fuerza no hace trabajo y no modifica la energía cinética (el módulo de la velocidad) de la nave.



Tal fuerza es igual a la masa de la nave multiplicada por su aceleración: puesto que la fuerza es perpendicular a la trayectoria, no hay aceleración tangencial (tangente a la trayectoria) sino sólamente existe la aceleración normal (perpendicular a la trayectoria):

$$G\frac{M_{\mathrm{Tierra}}m_{\mathrm{nave}}}{(R_T+h)^2}=m_{\mathrm{nave}}a_{\mathrm{normal}}=m_{\mathrm{nave}}\frac{v_0^2}{R_T+h}\,,\qquad v_0=\sqrt{\frac{GM_{\mathrm{Tierra}}}{R_T+h}}\,. \tag{1}$$

Para despejar la cantidad GM_{Tierra}, que no nos la dan, utilizamos es siguiente argumento: para puntos muy próximos a la superficie de la Tierra, sabemos que la fuerza con que atrae la Tierra a una masa m cualquiera es $F{=}mg$; pero de acuerdo con la Ley de Newton de la gravitación, esta fuerza también es igual a $G\dfrac{M_{\text{Tierra}}m}{R_T^2}$, de donde despejamos que $GM_{\text{Tierra}} = gR_T^2$, siendo el radio de la Tierra dato conocido. De aquí obtenemos que la velocidad orbital de la nave

$$v_0 = \underbrace{\sqrt{\frac{GM_{\text{Tierra}}}{R_T^2}}}_{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{R_T^2}{R_T + h}} = 7.7 \times 10^3 \,\mathrm{m/s}\,, \tag{2}$$

que por supuesto es constante, ya que como hemos visto al comienzo, la fuerza de la gravedad no modifica el valor de la velocidad. Y el periodo, o sea, el tiempo en dar una vuelta es

$$T = \frac{2\pi(R_T + h)}{v_0} = 5.4 \times 10^3 \,\mathrm{s}\,. \tag{3}$$

b) Una vez la nave ya ha empezado la trayectoria curvada de aproximación, la única fuerza externa que actúa sobre la nave vuelve a ser la gravitatoria, que como ya sabes es una que apunta al centro de la Tierra. Tal fuerza **no** cambia el momento angular $\vec{J}$ de la nave (Ley de Kepler), momento que medido desde el centro de la Tierra es

$$\text{punto } A\text{:}\;\; (R_T + h)m_{\text{nave}}v_A = |\vec{J}| = R_T m_{\text{nave}} v_B :\; \text{punto } B\,. \tag{4}$$

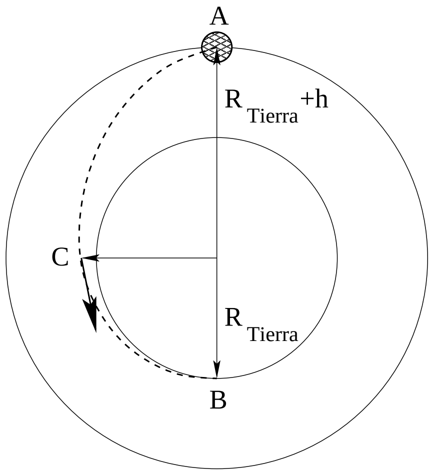
En esta parte del problema tenemos dos incógnitas (las velocidades en los puntos A y B) y por lo tanto necesitamos otra ecuación más. Ésta nos la va a dar la conservación de la energía mecánica (total) de la nave, suponiendo que durante toda la trayectoria elíptica de aproximación no hay ningún tipo de rozamiento. Sabemos que la energía potencial de una masa puntual m a una distancia r de la Tierra es igual a $-G\dfrac{M_{\text{Tierra}}m}{r}$ (el signo menos indica que la masa m es más estable, tiene menos energía potencial a una distancia finita de la Tierra que a una distancia infinita); y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\text{Energía mec.}_A &= \frac{1}{2}m_{\text{nave}}v_A^2 - G\frac{M_{\text{Tierra}}m_{\text{nave}}}{R_T + h}\,,\\
\text{Energía mec.}_B &= \frac{1}{2}m_{\text{nave}}v_B^2 - G\frac{M_{\text{Tierra}}m_{\text{nave}}}{R_T} = \text{Energía mec.}_A\,,
\end{aligned}$$

y combinando con (4) y con la relación $g = \dfrac{GM_{\text{Tierra}}}{R_T^2}$, obtenemos

$$v_A = \sqrt{2gR_T^2 \frac{R_T}{(R_T + h)(2R_T + h)}} = 7.6 \times 10^3 \,\mathrm{m/s}\,. \tag{5}$$

c) En teoría, y ya que conocemos v_A, podríamos resolver esta cuestión como en (4), utilizando la conservación del momento angular al no tener más que una fuerza exterior que es central. El único problema es que para calcular el momento angular (medido desde el centro de la Tierra) de la nave en el punto C necesitamos conocer el ángulo que forma la velocidad de la nave con respecto al vector de posición: recuerda que el momento angular se define a traés de un producto vectorial $\vec{J} = m\vec{r} \times \vec{v}$; este problema no lo tenía mos en el caso anterior ya que en los puntos A y B el vector de posición y la velocidad eran perpendiculares entre sí.



Luego el momento angular no nos sirve. Sin embargo, como nos dicen que, en el caso que estamos estudiando ahora, hasta este punto C la nave no ha rozado todavía con la atmósfera, entonces la energía mecánica de la nave se conserva

$$\text{E.mec.}_A = \frac{1}{2} m_{\text{nave}} v_A^2 - G\frac{M_{\text{Tierra}} m_{\text{nave}}}{R_T + h} = \frac{1}{2} m_{\text{nave}} v_C^2 - G\frac{M_{\text{Tierra}} m_{\text{nave}}}{R_T + h'} = \text{E.mec.}_C$$

$$v_C = \sqrt{\frac{2gR_T^2}{R_T + h}\left(\frac{R_T}{2R_T + h} + \frac{h - h'}{R_T + h'}\right)} = 7.9 \times 10^3 \,\text{m/s}\,. \tag{6}$$

d) Suponiendo que la reducción de energía cinética de la nave sólo es debida al rozamiento con la atmósfera (despreciamos el trabajo de frenado de los cohetes), entonces el trabajo hecho por tal rozamiento es igual a la variación de energía mecánica (que por lo tanto ya no se conserva) entre los puntos C y el punto de aterrizaje (donde la nave ya no lleva velocidad):

$$W_{\text{roz}} = \text{E.mec.}_C - \text{E.mec.}_{\text{aterrizaje}} = \text{E.mec.}_A - \text{E.mec.}_{\text{aterrizaje}}\,. \tag{7}$$

Y como ya sabemos cuál es la velocidad en el punto A (ver (5)), obtenemos que el trabajo del rozamiento por unidad de masa de la nave es

$$W_{\text{roz}} = \left[\frac{1}{2} m_{\text{nave}} v_A^2 - G\frac{M_{\text{Tierra}} m_{\text{nave}}}{R_T + h}\right] - \left[0 - G\frac{M_{\text{Tierra}} m_{\text{nave}}}{R_T}\right]\,,$$

$$\frac{W_{\text{roz}}}{m_{\text{nave}}} = gR_T\left(\frac{R_T^2}{(R_T + h)(2R_T + h)} - \frac{R_T}{R_T + h} + 1\right) = 3.2 \times 10^8 \,\text{J} \approx \frac{gR_T}{2}\,. \tag{8}$$

que se disipa en forma de calor.

2 Problema 2

Puesto que el campo electrostático es conservativo, se puede definir una energía potencial, que es igual a $E_{\text{pot}} = K\frac{qq'}{r}$ para dos cargas q y q' separadas en el vacío una distancia r, con K una constante igual a $K = 9 \times 10^9$ (nota que se trata de una forma de energía potencial muy similar a la del problema anterior, aunque ahora con cargas eléctricas en vez de masa). Si suponemos que el rozamiento con el aire es despreciable, el problema lo podemos resolver por conservación de la energía mecánica (suma de energía cinética y de las energías potenciales).

En la posición de partida, la carga Q que está arriba no tiene nada de energía cinética (está quieta), tiene una energía potencial gravitatoria igual a mgH_0 (con $H_0 = 0.1\,\mathrm{m}$) y una energía potencial electrostática igual a $K\frac{Q^2}{H_0}$ (suponemos que las bolitas son prácticamente puntuales, de tal forma que H_0 es la distancia que las separa inicialmente).

Soltamos la bola, va cayendo y acelerándose por acción de la gravedad pero a medida que se acerca a la otra bolita es repelida por esta. En el punto más cercano a la bolita que está en el suelo, parándose a una distancia $H_1 = 0.01\,\mathrm{m}$ de ella, la energía mecánica es la misma que al inicio:

$$0 + mgH_0 + K\frac{Q^2}{H_0} = \text{Energía mec. constante} = 0 + mgH_1 + K\frac{Q^2}{H_1}\,, \tag{9}$$

de donde obtenemos el siguiente dato que nos va a ser útil en el resto del problema:

$$\frac{KQ^2}{mg} = H_1\,H_0\,, \tag{10}$$

$$\text{Energía mec. constante} = mg\left(H_0 + \frac{KQ^2}{mg}\frac{1}{H_0}\right) = mg(H_0 + H_1)\,. \tag{11}$$

Si ahora consideramos un punto cualquiera de la trayectoria de la bolita, cuando está a una distancia h de la bolita inferior y lleva una velocidad v, tenemos entonces que la misma ecuación (9) se aplica aquí

$$mg(H_0+H_1) = \text{Energía mec. constante} = \frac{m}{2}v^2 + \underbrace{mgh + K\frac{Q^2}{h}}_{mg\left(h + \frac{KQ^2}{mg}\frac{1}{h}\right) = mg\left(h + \frac{H_0H_1}{h}\right)} \,. \tag{12}$$

a) Si ahora queremos saber para qué valor h' de la altura la velocidad v es máxima, argumentamos de la siguiente forma: para que la velocidad sea máxima (para que la energía cinética sea máxima), la energía potencial total $E_{\text{pot}} = mg\left(h + \frac{H_0H_1}{h}\right)$ ha de ser mínima ya que la suma de las dos, la energía mecánica, es constante. Luego hay que buscar el valor de h que hace que la derivada de la energía potencial con respecto a h sea cero:

$$0 = mg\left(1 - \frac{H_0H_1}{h'^2}\right) \Rightarrow h' = \sqrt{H_0H_1}\,. \tag{13}$$

Otro argumento completamente equivalente: cuando soltamos la bolita, ésta empieza a ganar velocidad (aceleración positiva). La velocidad, sin embargo, no puede aumentar indefinidamente ya que al final va a llegar a las cercanías de la otra carga, y por la repulsión electrostática, la bolita va a perder velocidad (aceleración negativa) hasta pararse. Por lo tanto en algún punto de la trayectoria la aceleración tiene que ser cero (ya que pasa de ser positiva a ser negativa) y en tal punto además la velocidad es máxima (ya que la aceleración, su derivada, es cero). Pero además el que la aceleración sea cero significa que la suma de fuerzas en tal punto es también cero: puesto que la fuerza de repulsión entre dos cargas q y q' separadas en el vacío una distancia r es $K\frac{qq'}{r^2}$, entonces en la posición donde la velocidad es máxima tenemos que

$$0 = \underbrace{-mg}_{\text{fuerza hacia abajo}} + \underbrace{K\frac{Q^2}{h'^2}}_{\text{fuerza hacia arriba}} , \tag{14}$$

que es el resultado (13) ya que de (10) sabemos que $KQ^2 = mg(H_0 H_1)$.

b) La correspondiente velocidad máxima se obtiene de sustituir h' en (12)

$$mg(H_0 + H_1) = \frac{m}{2}v_{\text{max}}^2 + mg\left(h' + \frac{H_0H_1}{h'}\right) \overset{h'=\sqrt{H_0H_1}}{=} mg\left[\frac{v_{\text{max}}^2}{2g} + 2\sqrt{H_0H_1}\right],$$

$$\frac{v_{\text{max}}^2}{2g} = \underbrace{\left(H_0 - 2\sqrt{H_0H_1} + H_1\right)}_{\left(\sqrt{H_0}-\sqrt{H_1}\right)^2} \Rightarrow v_{\text{max}} = \sqrt{2g}\left(\sqrt{H_0} - \sqrt{H_1}\right) \approx 1\,\text{m/s}. \tag{15}$$

c, d) Ahora tenemos que calcular en qué punto de toda la trayectoria la aceleración (o lo que es lo mismo, la fuerza) es la mayor. Sobre la bolita que cae actúan dos fuerzas: la del peso (que es constante e igual a mg) y la de la repulsión entre las dos bolitas. Esta repulsión es la mayor posible en el punto en el que están más cerca, luego en este punto es donde la aceleración de frenado es la mayor; y es la menor posible en el punto en que están más alejadas (al inicio del experimento). Puesto que la aceleración total es la resta de la aceleración de la gravedad g menos esta desaceleración por la repulsión entre las dos cargas eléctricas, entonces

cargas más juntas:

$$ma_{\text{max}} = mg - \frac{KQ^2}{H_0^2} \quad\Rightarrow\quad a_{\text{max}} = g\underbrace{\left(1 - \frac{KQ^2}{mg}\frac{1}{H_0^2}\right)}_{1-\frac{H_1}{H_0}} = 8.8\,\text{m/s}^2, \tag{16}$$

cargas más alejadas:

$$ma_{\text{min}} = mg - \frac{KQ^2}{H_1^2} \quad\Rightarrow\quad a_{\text{min}} = g\underbrace{\left(1 - \frac{KQ^2}{mg}\frac{1}{H_1^2}\right)}_{1-\frac{H_0}{H_1}} = -88\,\text{m/s}^2. \tag{17}$$

Nota que en valor absoluto la aceleración es la mayor en el punto en el que las dos cargas están más cerca.

e) Sabiendo el valor de la masa m, el valor de Q se deduce inmediatamente de (10):

$$|Q| = \sqrt{\frac{mgH_0H_1}{K}} = 1.0 \times 10^{-7}\,\text{culombios}\,. \tag{18}$$

3 Problema 3

Supongamos que desde que disparamos la bolita de plomo, que tiene una masa igual a $m = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{\text{diám.}}{2}\right)^3 \rho = 0.01\,\text{kg}$ (masa = volumen x densidad), hasta que choca con la masa M del péndulo balístico, la trayectoria es prácticamente horizontal (aunque en realidad sea un tiro parabólico).

La velocidad v_0 con la que la bolita de plomo sale disparada al soltar el muelle (que está comprimido una distancia x) se calcula utilizando la conservación de la energía mecánica: antes de soltar la bolita, ésta sólo tiene energía potencial elástica, $\frac{1}{2}Kx^2$, y después de que el muelle se ha estirado completamente, la bolita sólo tiene energía cinética (puesto que estamos suponiendo que la bolita sigue una trayectoria horizontal, sin cambiar de altura, no hace falta que tengamos en cuenta la energía potencial gravitatoria)

$$\frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 \;\Rightarrow\; v_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}\,x\,. \tag{19}$$

a) Ahora la bolita llega a la masa M del péndulo balístico, se incrusta en ella y le comunica un impulso. La interacción entre las dos masas (una fuerza interna al sistema formado por bolita + péndulo balístico) no modifica el momento angular de este sistema, por lo que podemos afirmar que que el momento angular *justo antes del choque* es igual al momento *justo después*; por supuesto, esta conservación del momento angular no se cumple si entre justo antes del choque y, por ejemplo, tres minutos después de él, ya que mientras tanto ha estado actuando la fuerza de la gravedad que es una fuerza externa al sistema y por tanto modifica el momento angular. Así, con respecto al punto del techo de donde cuelga la masa M, tenemos

$$|\vec{J}_{\text{sistema}}|\ \text{justo antes} = Lmv_0 = L(M+m)v' = |\vec{J}_{\text{sistema}}|\ \text{justo después}\,, \tag{20}$$

donde v' es la velocidad con la que retrocede el péndulo balístico con la bala de plomo incrustada en él.

Para calcular ahora la altura h hasta la que suben las dos masas utilizamos otra vez la conservación de la energía mecánica:

$$\text{Energía mec. abajo} = \frac{1}{2}(M+m)v'^2 + 0 = 0 + (M+m)gh = \text{Energía mec. arriba}\,,$$

y sustituyendo (20) y (19)

$$h = \frac{1}{2g}v'^2 = \frac{1}{2g}\left(\frac{m}{m+M}\right)^2 v_0^2 = \frac{1}{2g}\left(\frac{m}{m+M}\right)^2 \frac{K}{m}x^2 \,. \tag{21}$$

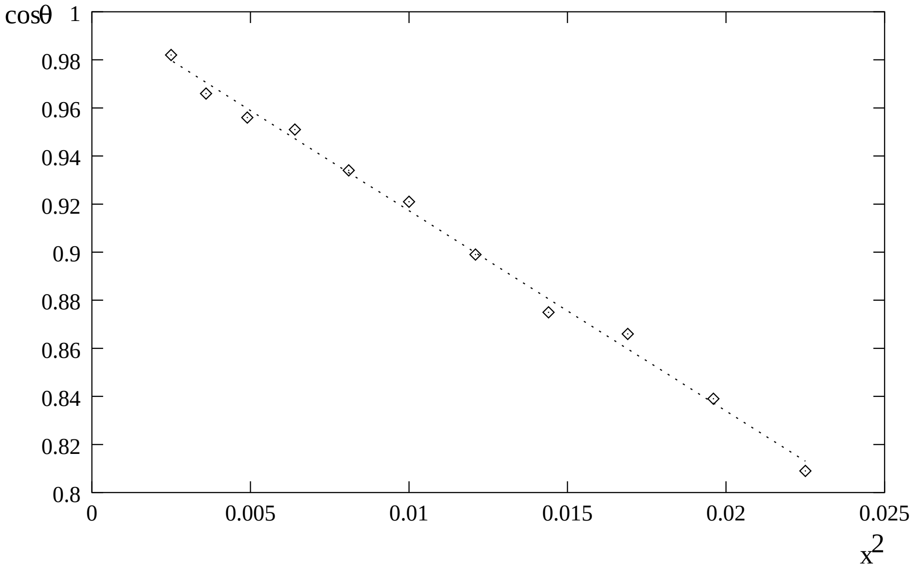
La relación entre la altura h y el ángulo que forma el péndulo con la vertical cuando alcanza el punto más alto es muy sencillo de obtener: $h = L - L\cos\theta = L(1-\cos\theta)$.

b) Hemos obtenido $h = \frac{K}{2g}\frac{m}{(m+M)^2}x^2$, o lo que es lo mismo, comparando con $h = Ax^n$, tenemos que $n = 2$ y $A = \frac{K}{2g}\frac{m}{(m+M)^2}$ (con K y M desconocidos). Para determinar el valor de A (para luego poder deducir M), vamos a representar los datos que nos dan. La mejor forma de hacerlo es ingeniárnoslas para que la representación gráfica resulte ser una recta: puesto que h es proporcional a x al *cuadrado*, la forma de obtener una recta es representar en un eje h y en el otro x^2, para que asílo representado en un eje sea linealmente proporcional a lo representado en el otro (lo que por definición es una recta). La pendiente de tal recta será la constante de proporcionalidad entre h y x^2, o sea A; para más detalles, ver trucos.

O, puesto que lo que nos dan es directamente el ángulo, también podemos operar

$$h = Ax^2\,, \quad h = L(1-\cos\theta)\,, \quad \cos\theta = 1 - \frac{A}{L}x^2\,, \tag{22}$$

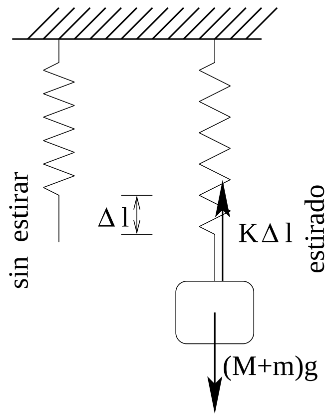
y representando el coseno frente a x^2 obtendremos una recta de pendiente $-\frac{A}{L}$, como en la siguiente figura:



La pendiente la podemos calcular aproximadamente midiendo el ángulo de la recta (la pendiente es la tangente trigonométrica de este ángulo) o bien tomando dos puntos cualesquiera de la recta: por ejemplo con el primer y último punto de la recta se obtiene

$$\text{pendiente} = -\frac{A}{L} = \frac{\cos(\theta = 36) - \cos(\theta = 11)}{(x = 0.15)^2 - (x = 0.05)^2} = -8.6\,\mathrm{m}^{-2}\,. \tag{23}$$

Puesto que además nos dicen que si al muelle de constante K desconocidad le colgamos una masa $M+m$ y dejamos que alcance su posición de equilibrio, el alargamiento del muelle es $\Delta l = 0.011\,\mathrm{m}$, entonces (ver figura)



$$K\,\Delta l = (M+m)g \;\Rightarrow\; K = (M+m)\frac{g}{\Delta l}\,. \tag{24}$$

Con ello y el resultado (23) despejamos finalmente la constante del muelle y la masa del péndulo balístico:

$$A = 4.3 = \frac{1}{2\Delta l}\frac{m}{m+M} \;\Rightarrow\; M+m = 0.11\,\mathrm{kg}\,,$$

$$M = 0.10\,\mathrm{kg}\,, \quad K = (M+m)\frac{g}{\Delta l} = 98\,\mathrm{N/m}\,. \tag{25}$$

En cuanto a la última pregunta de este apartado, nuestra regla sólo puede distinguir milímetros. El alargamiento que produce la bolita de plomo, que tiene una masa de 0.01 kilogramos, sería de (ver (24))

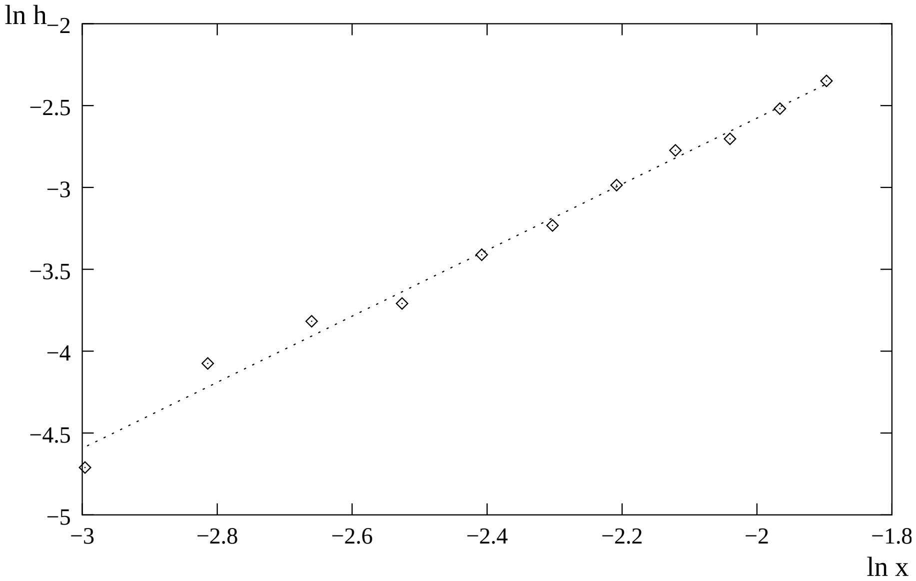
$$K\Delta l = mg \;\Rightarrow\; \Delta l = \frac{mg}{K} = 0.001\,\mathrm{m}\,,$$

es decir, justo un milímetro, que es lo mínimo que llega a distinguir nuestra regla. Esto quiere decir que un estiramiento menor (por ejemplo de 0.8 mm o de 0.7mm) lo hubiéramos apreciado en la regla también como de 1 mm, puesto que no podemos distinguir distancias menores. Esto hace que las medidas que podamos hacer usando esta bolita nos dan un valor de la constante de muelle que tiene un error justo del orden de magnitud del valor de K que queremos determinar: el procedimiento no es nada exacto.

c) Supongamos que, al no saber deducir (21), no podemos determinar que la altura es proporcional al cuadrado de los que se ha comprimido originariamente el muelle para disparar la bolita de plomo. Nos encontramos con $h = Ax^n$, pero ahora con A y también n desconocidos. La forma de obtener el valor del exponente en tal caso se obtiene, como se indica en el problema, utilizando el método de tomar logaritmos (con más detalle en la página dedicada a trucos):

$$h = Ax^n \;\Rightarrow\; \ln h = n\ln x + \ln A\,.$$

De esta forma, si representamos el logaritmo de la altura h frente al logaritmo de lo que se comprime el muelle x, obtenemos una recta de pendiente n (el exponente que andamos buscando) y término independiente $\ln A$.



Una forma aproximada de obtener la pendiente y el término independiente de la recta es volviendo a tomar dos puntos cualesquiera de la recta (por ejemplo el primero y el último) y recordar que $h = L(1 - \cos\theta)$

$$\text{pendiente} = n = \frac{\ln\left[L\left(1 - \cos(\theta = 36)\right)\right] - \ln\left[L\left(1 - \cos(\theta = 11)\right)\right]}{\ln(x = 0.15) - \ln(x = 0.05)} = 2.1\,,$$

y puesto que $\ln h = n \ln x + \ln A$

$$\ln A = \ln\left[L\left(1 - \cos(\theta = 36)\right)\right] - \underbrace{n}_{=2} \ln(x = 0.15) = 1.446\,,$$

o equivalentemente

$$n \approx 2\,, \qquad A = e^{1.446} = 4.25\,\mathrm{m}^{-1}\,. \tag{26}$$

que, como era de esperar, demuestra que la dependencia de la altura con la compresión del muelle es cuadrática, n=2; además el valor de A es bastante parecido al valor de A=L x 8.6=4.3 obtenido en (23).

4 Soluciones completas en formato PDF

Descarga de las soluciones aquí: apretando la tecla derecha del ratón sobre el enlace subrayado, elegir “Guardar enlace como” (Netscape) o “Guardar objetivo como” (Explorer).

Para usuarios de Linux, el archivo se puede abrir con el programa GhostView: escribir **gv local03.pdf &** o bien **kghostview local03.pdf &** en una consola de texto.

Para usuarios de Windows, el archivo se abre con el programa Acrobat Reader cliqueando directamente sobre el archivo descargado.