

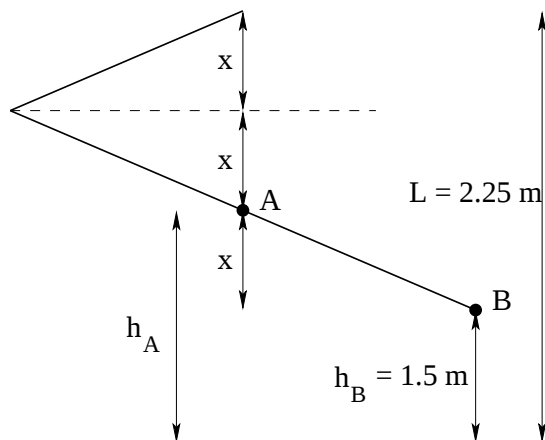
SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS EN EL DISTRITO UNIVERSITARIO DE LA RIOJA PARA LA FASE LOCAL DE LA XII OLIMPIADA ESPAÑOLA DE FÍSICA

1 Problema 1

Para la primera cuestión: puesto que por definición la velocidad es la derivada del espacio recorrido con respecto al tiempo, el espacio recorrido hasta un instante de tiempo t es la integral definida de la velocidad desde el instante inicial hasta este instante t : $s(t) = \int_0^t v(t)dt$. Para el punto A calcular tal integral definida, que no es otra cosa que el área comprendida entre la gráfica de la velocidad (figura 4 del enunciado) y el eje del tiempo (o abscisas), es muy sencillo: al cabo de un tiempo t_f el punto A ha recorrido un espacio igual a $2L/3$

$$\frac{2L}{3} = \frac{v_0 t_1}{2} + v_0 (t_f - t_1) \Rightarrow v_0 = \frac{2L}{3 \left(t_f - \frac{t_1}{2} \right)} = 0.051 \text{ m/s}, \quad (1)$$

que es una velocidad muy pequeña.



Puesto que ya sabemos cómo varía con el tiempo la posición del punto A , calculemos primeramente cuál es la posición de A cuando B está a una altura de 1.5 m. Por el dibujo se ve que la altura de A es $h_A = h_B + x$ con x dado por la relación

$$3x = L - h_B \quad \Rightarrow \quad h_A = h_B + \frac{L - h_B}{3} = 1.75 \text{ m}.$$

Ahora, siguiendo el mismo procedimiento que para llega al resultado (1), obtenemos que el tiempo t_{subir} para que A suba una altura h_A es por tanto

$$h_A = \frac{v_0 t_1}{2} + v_0 (t_{\text{subir}} - t_1) \quad \Rightarrow \quad t_{\text{subir}} = 20, 2 \text{ s}. \quad (2)$$

La energía mecánica de la puerta al final del proceso de subir la puerta es mayor que la energía mecánica inicial, ya que la puerta ha ganado en velocidad (parte del reposo para llegar arriba con una velocidad pequeña y por tanto ha incrementado su energía cinética) y ha ganado en altura (ha incrementado su energía potencial). La diferencia de energía mecánica entre el punto final y el inicial es por lo tanto igual al trabajo realizado por el motor. Aunque la energía mecánica sea igual a la suma de la energía cinética y de la energía potencial, puesto que la velocidad que llega a ganar la puerta es muy pequeña, podemos aproximar la variación de energía mecánica a la variación de energía potencial exclusivamente:

$$\text{trabajo del motor} = W_{\text{realizado por motor}} = \Delta E_{\text{mec}} \approx \Delta E_{\text{pot}}. \quad (3)$$

Y esta ΔE_{pot} es igual a

$$\Delta E_{\text{pot}} = Mg \frac{L}{2},$$

ya que el centro de masas de la puerta sube una altura $L/2$

$$W_{\text{realizado por motor}} \approx \Delta E_{\text{pot}} = Mg \frac{L}{2} = 0.77 \text{ kJ}. \quad (4)$$

Como 1kWh es igual a 1000 W x 3600 s = 3600 kJ, el coste de subir la puerta es aproximadamente 0.002 céntimos.

Al cerrar la puerta quien hace el trabajo es el campo gravitatorio terrestre y así el motor recibe (en vez de hacer) trabajo. Por tanto no hay coste de ningún tipo.

En el caso de contar con un contrapeso el trabajo que hace el motor al subir la puerta viene dado, de forma similar a como se ha calculado en (3)-(4), aproximadamente por la variación de la energía potencial de la puerta y del contrapeso; este último *desciende* una altura de $2L/3$ si es que está atado al punto A

$$W_{\text{realizado por motor}} \approx \Delta E_{\text{pot}} = Mg \frac{L}{2} - \underbrace{M_{\text{contrapeso}}}_{\approx M} g \frac{2L}{3} = -0.26 \text{ kJ} < 0. \quad (5)$$

Puesto que es negativo, el motor no hace trabajo al abrir la puerta y el coste es 0.

2 Problema 2

Puesto que La Tierra da 1 vuelta ($= 2\pi$ radianes) en 1 día ($= 3600 \times 24$ segundos), su velocidad angular es

$$\omega = \frac{2\pi}{3600 \times 24} = 7.27 \times 10^{-5} \text{ rad/s}. \quad (6)$$

Para la órbita se cumple que la fuerza que actúa sobre el satélite, que es la gravitatoria $G \frac{M_{\text{Tierra}} m}{r^2}$, le produce al satélite exclusivamente una aceleración centrípeta:

$$G \frac{M_{\text{Tierra}} m}{r^2} = m a_{\text{centr}} = m \omega_{\text{satel}}^2 r, \quad (7)$$

siendo la velocidad angular del satélite ω_{satel} , para una órbita geoestacionaria, igual a (6). Puesto que la aceleración de la gravedad g sobre la superficie de La Tierra es $g = G \frac{M_{\text{Tierra}}}{R_{\text{Tierra}}^2} = 9.81 \text{ m/s}^2$, del resultado (7) se despeja el radio de la órbita geoestacionaria

$$r_{\text{geo}} = \left(\frac{g R_{\text{Tierra}}^2}{\omega^2} \right)^{1/3} = 42.2 \times 10^3 \text{ km}. \quad (8)$$

La velocidad lineal de traslación del satélite es entonces

$$v_{\text{geo}} = r_{\text{geo}} \omega = 3071 \text{ m/s} = 11054 \text{ km/h}. \quad (9)$$

Recordemos que para un campo conservativo como el gravitatorio, a una fuente puntual (para puntos fuera de La Tierra a ésta la podemos considerar puntual) que crea un campo atractivo le corresponde una energía potencial negativa: $-G \frac{M_{\text{Tierra}} m}{r}$. El signo menos es debido a que si para puntos infinitamente alejados ($r = \infty$), de forma que allá ya no se “nota” el campo atractivo, entonces para puntos más próximos, donde una masa está más “sujeta” por la atracción gravitatoria, la energía potencial tiene que ser menor que para puntos muy alejados: como para el infinito la energía potencial es 0, para puntos más próximos, la energía potencial (que es menor) tiene que ser entonces negativa. Para una masa m a una distancia r de una masa puntual M , y por tanto sometida a una energía potencial $-G \frac{Mm}{r}$, se define la velocidad v_{escape} como la velocidad necesaria para escapar de tal campo gravitatorio atractivo y llegar a un punto alejado infinitamente de cualquier masa (y por tanto, un punto donde la energía potencial es 0) con una velocidad 0. Por lo tanto, la energía mecánica (suma de energía cinética y potencial) en este punto alejado infinitamente es 0, y como la energía mecánica se conserva (suponemos que no hay rozamientos en el espacio)

$$E_{\text{mec}} = \frac{m}{2} v_{\text{escape}}^2 + \left(-G \frac{M_{\text{Tierra}} m}{r} \right) = E_{\text{mec punto infinito}} = 0. \quad (10)$$

Sustituyendo $g = G \frac{M_{\text{Tierra}}}{R_{\text{Tierra}}^2}$ en esta última ecuación obtenemos que la velocidad de escape para una órbita geoestacionaria (de radio igual a (8)) es

$$v_{\text{escape}} = \sqrt{2g \frac{R_{\text{Tierra}}^2}{r_{\text{geo}}}} = 4343 \text{ m/s} = 15636 \text{ km/h}, \quad (11)$$

que no depende de la masa m que se quiere escapar del campo gravitatorio terrestre.

Puesto que la masa de la partícula que lanzamos es mucho menor que la masa del satélite, podemos considerar que éste no varía su velocidad de traslación (que sigue siendo (9)). Medida con respecto al satélite, la velocidad de escape (11) de la partícula será entonces

$$v_{\text{relativa part}} = v_{\text{escape}} - v_{\text{geo}} = 1272 \text{ m/s} = 4582 \text{ km/h}. \quad (12)$$

Para la última parte del problema hay que tener en cuenta que la fuerza gravitatoria, por ser central, no tiene momento con respecto al centro de la órbita: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_{\text{grav}} = \vec{0}$ (ya que $\vec{r}$ y $\vec{F}_{\text{grav}}$ son antiparalelos). Por ello, y teniendo en cuenta que el momento de una fuerza es lo que hace cambiar con el tiempo al momento angular $\vec{L} = \vec{r} \times (m\vec{v})$ a través de la ecuación $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$, entonces el momento angular medido desde el centro de la órbita (desde La Tierra) para el movimiento de la partícula es constante (que es la segunda ley de Kepler)

$$L_{\text{inicial}} = m_{\text{part}} r_{\text{geo}} v' = L_{\text{más cerca}} = m_{\text{part}} r_{\text{cerca}} v_{\text{cerca}}, \quad (13)$$

donde v' es la velocidad de la partícula *medida desde el centro de la órbita* (o sea, desde La Tierra, que suponemos es un sistema inercial). Puesto que el satélite va a la velocidad (9) (medida desde La Tierra) y la partícula a una velocidad (12) (medida desde el satélite y disparada en sentido contrario al del movimiento de éste), entonces la velocidad de la partícula v' medida desde La Tierra es $v' = v_{\text{geo}} - v_{\text{relativa part}} = 1798 \text{ m/s} = 6472 \text{ km/h}$. Como además del momento angular también se conserva la energía mecánica (suponiendo que no hay rozamientos de ningún tipo), entonces aparte de (13) también se cumple que la energía mecánica en el instante inicial del disparo es igual a la energía mecánica en el punto de la trayectoria más cercano a La Tierra

$$\frac{m_{\text{part}}}{2} v'^2 - G \frac{M_{\text{Tierra}} m_{\text{part}}}{r_{\text{geo}}} = E_{\text{mec}} = \frac{m_{\text{part}}}{2} v_{\text{cerca}}^2 - G \frac{M_{\text{Tierra}} m_{\text{part}}}{r_{\text{cerca}}}, \quad (14)$$

en donde, tras sustituir el resultado (13) para despejar r_{cerca} y teniendo siempre en cuenta que $g = G \frac{M_{\text{Tierra}}}{R_{\text{Tierra}}^2}$, obtenemos la siguiente ecuación de segundo grado

$$\left(\frac{v_{\text{cerca}}}{v'} \right)^2 - 2g \frac{R_{\text{Tierra}}^2}{v'^2 r_{\text{geo}}} \left(\frac{v_{\text{cerca}}}{v'} \right) + \left[2g \frac{R_{\text{Tierra}}^2}{v'^2 r_{\text{geo}}} - 1 \right] = 0.$$

De las dos soluciones posibles que tiene la ecuación, $\frac{v_{\text{cerca}}}{v'} = \frac{2g \frac{R_{\text{Tierra}}^2}{v'^2 r_{\text{geo}}} \pm 2 \left[g \frac{R_{\text{Tierra}}^2}{v'^2 r_{\text{geo}}} - 1 \right]}{2}$, nos interesa aquella que corresponde al punto más cercano a La Tierra y por tanto a la

velocidad mayor posible (signo + en el +/-), ya que de acuerdo con (13), el producto del radio de la órbita por la velocidad es una constante

$$\frac{v_{\text{cerca}}}{v'} = 2 \underbrace{g \frac{R_{\text{Tierra}}^2}{v'^2 r_{\text{geo}}}}_{\approx 3} - 1 \approx 5.$$

Y volviendo a (13), la distancia más cerca a La Tierra de la órbita de la partícula será

$$r_{\text{cerca}} = r_{\text{geo}} \frac{v'}{v_{\text{cerca}}} \approx \frac{r_{\text{cerca}}}{5} = 8.5 \times 10^3 \text{ km}. \quad (15)$$

Tal órbita, de acuerdo con la primera ley de Kepler, es una órbita elíptica.

3 Problema 3

Partimos de que la fuerza entre las cargas q y q' tiene la forma $F = K \frac{qq'}{r^n}$, con n número entero desconocido y K una constante desconocida que tenemos que despejar. Tal fuerza actúa en la dirección de la recta que une las dos cargas. Evidentemente en el montaje de la figura (en el que vamos a despreciar desde el principio la atracción gravitatoria) tal fuerza no tiene una dirección exactamente horizontal cuando el hilo de longitud L , al que está unido la carga q , no está horizontal.

Sin embargo, suponiendo que la distancia r a la segunda carga q' es mucho mayor que L , podemos aproximar la fuerza como horizontal y además considerarla que es prácticamente constante. Un caso similar ocurre con el péndulo simple dentro de un campo gravitatorio: también al desplazar el péndulo de su posición vertical la distancia al centro de La Tierra aumenta y la dirección de la fuerza gravitatoria no es exactamente vertical, pero sin embargo como la distancia al centro es mucho mayor que la longitud del péndulo, podemos aproximar que la fuerza de atracción gravitatoria sigue siendo vertical y con prácticamente el mismo valor que cuando el péndulo colgaba verticalmente.

Para el péndulo simple en el campo gravitatorio terrestre, el periodo de su movimiento viene dado por $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ si las oscilaciones son pequeñas. En nuestro caso, la fuerza que actúa entre las dos cargas, suponiendo que r sea mucho mayor que L , también la podemos escribir como si se tratara de un campo gravitatorio

$$F = K \frac{qq'}{r^n} = m \text{ “}g\text{”},$$

donde la “ g ” ahora corresponde por tanto a

$$\text{“}g\text{”} = \frac{Kqq'}{m} r^{-n}. \quad (16)$$

Sustituyendo este resultado en el periodo de un péndulo simple en un campo gravitatorio, obtenemos que el periodo en nuestro problema es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{Lm}{Kqq'}} r^{n/2}, \quad (17)$$

si las oscilaciones son pequeñas.

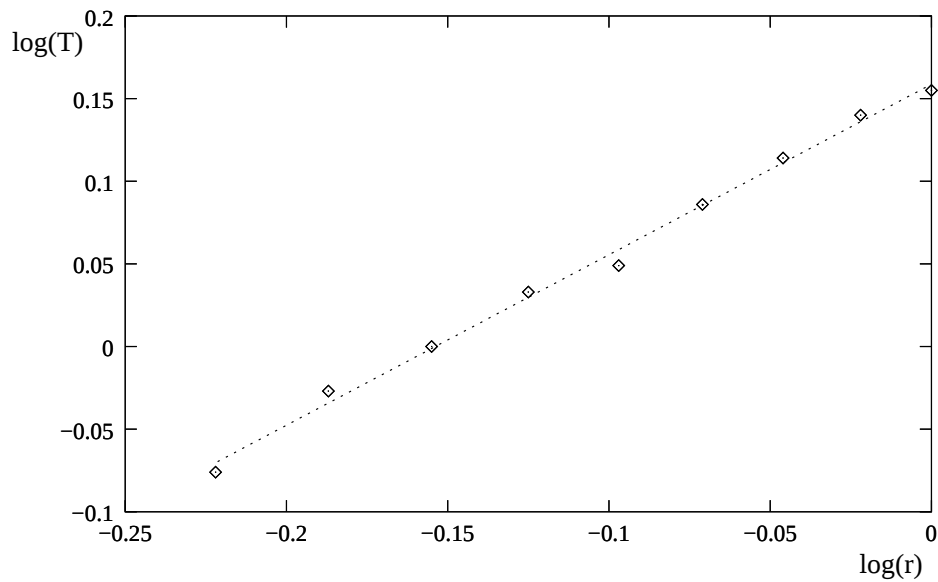
Ahora tenemos que despejar primeramente el número entero n que aparece como exponente de r en la relación (17). Puesto que $2\pi\sqrt{\frac{Lm}{Kqq'}}$ es una constante, tenemos que buscar un n entero tal que $\frac{T}{r^{n/2}}$ permanezca constante también. Con los datos experimentales que tenemos, construimos la siguiente tabla:

	r (en m)	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95	1
	T (en s)	0.84	0.94	1.00	1.08	1.12	1.22	1.30	1.38	1.43
$n=1$	$T/\sqrt{r}$	1.08	1.17	1.20	1.25	1.25	1.32	1.37	1.42	1.43
$n=2$	T/r	1.40	1.45	1.43	1.44	1.40	1.44	1.44	1.45	1.43
$n=3$	$T/r^{3/2}$	1.81	1.79	1.71	1.66	1.57	1.56	1.52	1.49	1.43

Por supuesto que no hace falta que hagas todos los cálculos de la tabla anterior, basta con que tomes dos o tres valores: p.ej. los correspondientes a $r=0.6$ m, $r=0.8$ m y $r=1$ m. De los datos de esta tabla vemos que para $n=1$ $T/\sqrt{r}$ no permanece constante al incrementar r . Y otro tanto ocurre para $n=3$. Sólo para $n=2$ se ve que T/r permanece aproximadamente constante para cualquier valor de r : por lo tanto $n=2$. Teniendo en cuenta (17) obtenemos $1.43 \text{ m/s} \approx \frac{T}{r} = 2\pi\sqrt{\frac{Lm}{Kqq'}}$, de donde, utilizando los datos al final del enunciado, se llega a

$$K = 4\pi^2 \frac{Lm}{qq'} \frac{1}{1.43^2} = 9.7 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2, \quad (18)$$

que es bastante parecido al valor real de $9 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$.



Otra forma más elegante de resolver este problema sin necesidad de elaborar la tabla anterior es utilizando el método que se explica en la página dedicada a trucos

para resolver problemas de olimpiada: como lo que queremos despejar es un exponente desconocido, entonces representamos en el eje vertical el logaritmo del periodo y en el eje horizontal el logaritmo de la distancia, obteniendo la gráfica de arriba. De acuerdo con (17), tenemos por otra parte que

$$\log(T) = \log\left(2\pi\sqrt{\frac{Lm}{Kqq'}}\right) + \frac{n}{2} \log(r), \quad (19)$$

luego los datos de la anterior gráfica estarán sobre una recta de pendiente $n/2$ (de donde despejamos n) y tal recta, para un valor de abcisa igual a 0, corta al eje vertical en un valor igual a $\log\left(2\pi\sqrt{\frac{Lm}{Kqq'}}\right)$ (de donde despejamos K). Esta pendiente se puede calcular tomando una pareja de puntos y viendo cuál es la tangente trigonométrica de la inclinación de la recta, que sale aproximadamente 1; y el término constante donde la recta corta al eje vertical para un valor de la abcisa igual a 0 es aproximadamente 0.16

$$\begin{cases} 1 \approx \frac{n}{2} \\ \log\left(2\pi\sqrt{\frac{Lm}{Kqq'}}\right) = 0.16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 2, \\ K = 4\pi^2 \frac{mL}{qq'} 10^{-2 \times 0.16} = 9.5 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2. \end{cases} \quad (20)$$

4 Soluciones completas en formato PDF

Descarga de las soluciones aquí: apretando la tecla derecha del ratón sobre el enlace subrayado, elegir “Guardar enlace como” (Netscape) o “Guardar objetivo como” (Explorer).

Para usuarios de Linux, el archivo se puede abrir con el programa GhostView: escribir **gv local01.pdf &** o bien **kghostview local01.pdf &** en una consola de texto.

Para usuarios de Windows, el archivo se abre con el programa Acrobat Reader clickeando directamente sobre el archivo descargado.