SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS DE ELECTROMAGNETISMO, ONDAS Y ÓPTICA: ELECTROMAGNETISMO Y ONDAS 41-57

1 Problemas de aplicación de la Ley de Faraday (I): 41-47, 49-50, 52-53, 56

$$\boxed{\text{f.e.m.}\,\mathcal{E} = \oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi_m}{dt} \quad \text{con} \quad \phi_m = \int_{\text{área } S \text{ delimitada por } C} \vec{B}\cdot d\vec{S}}$$

P.41 Un solenoide de sección circular infinitamente largo crea en su interior un campo magnético uniforme igual a $B = \mu_0 n I$, donde n es el número de vueltas que tiene el solenoide por unidad de longitud; la dirección de este campo es paralelo al eje del solenoide. Fuera del solenoide infinito, el campo magnético es cero.

Ahora consideremos una bobina formada por N espiras y cuyo radio R_2 es mayor que el radio R_1 de cada espira del solenoide: puesto que el campo magnético fuera del solenoide es cero, el único flujo que atraviesa a cada una de las N espiras de la bobina es igual a

$$\phi_{m\,2,\,\text{por espira}} = \int_{\text{sección solenoide}} \vec{B}\cdot d\vec{S} + 0 = \pi R_1^2\,\mu_0 n I\,,$$

siendo el cero de la ecuación anterior el flujo que atraviesa el área de la bobina que queda fuera del solenoide. El resultado anterior es el flujo que atraviesa cada espira de la bobina, luego el flujo total que atraviesa a la bobina es N veces este resultado

$$\phi_{m\,2} = N\pi R_1^2\,\mu_0 n I\,. \tag{1}$$

Para el caso en que la bobina tenga un radio menor que el de la sección del solenoide, entonces toda la bobina es atravesada por campo magnético y

$$\phi_{m\,3} = N\int_{\text{sección bobina}} \vec{B}\cdot d\vec{S} = N\pi R_3^2\,\mu_0 n I\,. \tag{2}$$

P.42 De acuerdo con la Ley de Faraday un flujo ϕ_m del campo magnético que varía con el tiempo al atravesar el área delimitada por un conductor cerrado produce en este conductor una corriente inducida igual a

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\phi_m}{dt}\,, \tag{3}$$

siendo R la resistencia del conductor. La carga que ha circulado por este conductor al cabo de un cierto tiempo es, por definición de corriente eléctrica $i = \dfrac{dQ}{dt}$, la integral de la corriente con respecto al tiempo. Luego aplicando (3) se obtiene

$$Q = \int_{\text{inicial}}^{\text{final}} i\, dt = -\frac{1}{R}\int_{\text{inicial}}^{\text{final}} \frac{d\phi_m}{dt}\, dt = -\frac{1}{R}\left(N\phi_{m2} - N\phi_{m1}\right). \tag{4}$$

P.43 Inicialmente para t=0, el flujo que atraviesa cada una de las N espiras de superficie ab es máximo ya que cada espira está completamente perpendicular al campo magnético: cada espira presenta la mayor superficie posible a ser atravesada por el campo B, o lo que es lo mismo, el vector superficie (que es normal a la espira) es paralelo al vector campo magnético. Al cabo de un cierto tiempo t, la espira ha rotado un ángulo ωt y por tanto presenta una superficie más pequeña al campo magnético, siendo este factor de disminución el coseno del ángulo que forma B con el vector superficie de la espira. Este coseno es precisamente el que entra en el producto escalar que define el flujo magnético $\phi_m = \int_{\text{espira}} \underline{\underline{\vec{B} \cdot d\vec{S}}}$ que atraviesa la espira. El flujo de una campo magnético constante que atraviesa las N espiras es entonces

$$\phi_m = N \int_{\text{espira}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = N\, B\, ab\, \cos(\omega t)\,,$$

y de acuerdo con la Ley de inducción de Faraday, la f.e.m. inducida en el conjunto de las espiras es

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = -\frac{d\phi_m}{dt} = NBab\,\omega\,\mathrm{sen}\,(\omega t)\,. \tag{5}$$

P.44 Este problema sirve de aplicación del resultado obtenido en el problema 42. Si cada espira de radio r=0.01 m de una bobina de N=100 vueltas es atravesada por un campo magnético constante B=1.0 T, entonces el flujo inicial que atraviesa cada espira es $\phi_{m\,1} = B\,\pi r^2$ y cuando el campo magnético ha cambiado de sentido, el flujo es $\phi_{m\,2} = -B\,\pi r^2$. De auerdo con (4), la carga que ha circulado por toda la bobina de resistencia R=50 ohmios es

$$Q = -\frac{N\phi_{m2} - N\phi_{m1}}{R} = \frac{2N\,B\,\pi r^2}{R}\,. \tag{6}$$

Si para hacer esta inversión de sentido se necesita un tiempo $\Delta t = 0.1\,\mathrm{s}$, la intensidad media y la f.e.m. media son

$$I_{\text{media}} = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{Q}{\Delta t} = \frac{2NB\pi r^2}{R\Delta t}\,. \tag{7}$$

P.45 El campo magnético creado por un solenoide muy largo (es decir, que se pueda aproximar a un solenoide infinitamente largo) es igual a la constante $B_{\text{int}} = \mu_0 n I$ para cualquier punto en el interior del solenoide, y cero fuera del solenoide. La dirección de este campo magnético es paralela al eje del solenoide. El flujo magnético que atraviesa una circunferencia de radio r colocada perpendicularmente al eje del solenoide será entonces

$$\phi_m = \int_{\text{área encerrada por } C} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \begin{cases} \mu_0 n I \, \pi r^2 & r < R \text{ (interior solenoide)}, \\ \mu_0 n I \, \pi R^2 & r > R\,. \end{cases}$$

Si este flujo que atraviesa el círculo de radio r cambia con el tiempo, por ejemplo porque cambia la intensidad I que circula por el solenoide, se induce un campo eléctrico que cumple

$$\oint_{\text{camino } C} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi_m}{dt}\,,$$

es decir, el campo eléctrico inducido es tangente al camino cerrado C (si éste es una circunferencia) que delimita el área sobre la que acabamos de integrar para calcular ϕ_m. Aunque para hacer la integración del flujo hubiera servido cualquier camino cerrado (no sólo la circular), por la simetría cilíndrica del problema es más útil tomar una circunferencia porque así el campo $\vec{E}$ es el mismo en todos los puntos del camino C y por tanto se puede escribir para tal circunferencia que

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_{\text{tang}}\, 2\pi r\,,$$

donde el subíndice en el campo eléctrico indica que su dirección es tangente a una circunferencia. De esta forma obtenemos finalmente que

$$E_{\text{tang}}\, 2\pi r = -\frac{d\phi_m}{dt} = \begin{cases} -\mu_0 n I_0 \, \pi r^2 \, \omega \cos(\omega t) & r < R\,, \\ -\mu_0 n I_0 \, \pi R^2 \, \omega \cos(\omega t) & r > R\,, \end{cases} \tag{8}$$

de donde se despeja directamente el campo eléctrico inducido.

P.46 La posición de la barra, $x = x_0 \cos(\omega_0 t)$ con $x_0 = 0.02\,\text{m}$ y $\omega_0 = 120\pi\,\text{s}^{-1}$, cambia con el tiempo a lo largo del eje X, llevando una velocidad $v(t) = \dfrac{dx}{dt} = -x_0\omega_0 \,\text{sen}\,(\omega_0 t)$. Puesto que este movimiento lo hace dentro de un campo magnético perpendicular a la velocidad, y puesto que la barra es conductora y por tanto su carga puede moverse dentro de ella, entonces sobre las cargas de la barra aparece una fuerza (la fuerza de Lorentz) que es perpendicular tanto al campo magnético como a la velocidad, es decir, una fuerza paralela a la barra. Esta fuerza qvB va a mover las cargas libres positivas del conductor hacia uno de los extermos del conductor (y las cargas negativas hacia el extremo contrario) creando una acumulación de cargas en los extremos que crea un campo eléctrico que se opone a la fuerza de Lorentz: la fuerza de Lorentz seguirá moviendo las cargas libres hasta el momento en que el campo eléctrico que crean estas cargas desplazadas compense la fuerza de Lorentz. Este campo eléctrico de equilibrio tendrá por tanto un módulo igual a $\dfrac{qvB}{q}$; si la barra se mueve en el sentido del eje X positivo, el sentido de la fuerza de Lorentz es del eje Y negativo y por tanto el sentido del campo eléctrico creado por las cargas desplazadas es el del eje Y positivo. La diferencia de potencial $\Delta V \equiv \mathcal{E}$ entre los extremos de la barra viene dada por

$$\Delta V = -\int_{y=0}^{y=L} E\, dy = -\int_{y=0}^{y=L} vB\, dy = x_0\omega_0 \,\text{sen}\,(\omega_0 t) LB\,, \tag{9}$$

puesto que el campo magnético y la velocidad no dependen de la coordenada y.

Otra forma de obtener este resultado es la siguiente: cuanco la barra se ha desplazado a lo largo del eje X una distancia $x = x_0 \cos(\omega_0 t)$, el flujo del campo magnético que atraviesa el área barrida por la barra al moverse es $\phi_m = xLB$ y por tanto, la diferencia de potencial inducida es

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_m}{dt} = -\frac{dx}{dt}LB = x_0\omega_0 \,\mathrm{sen}\,(\omega_0 t)LB\,, \tag{10}$$

ya que el campo magnético es constante.

P.47 En este problema hay que considerar tres intervalos de tiempos:

- Desde t=0 hasta el tiempo $t_1 = \dfrac{0.10\,\mathrm{m}}{0.024\,\mathrm{m/s}} = 4.17\,\mathrm{s}$, en que la espira está entrando dentro de la zona donde hay campo magnético.

- Desde t_1 hasta $t_2 = t_1 + \dfrac{(0.20-0.10)\,\mathrm{m}}{0.024\,\mathrm{m/s}} = 8.33\,\mathrm{s}$ en que la espira recorre el área con campo magnético hasta que su extremo delantero va a empezar a salir.

- Desde t_2 hasta $t_3 = t_2 + \dfrac{0.10\,\mathrm{m}}{0.024\,\mathrm{m/s}} = 12.5\,\mathrm{s}$ en que la espira sale totalmente de la zona con campo magnético.

Puesto que el campo magnético es constante, B=1.7 T y perpendicular a la espira rectangular de anchura a=0.05 m, el cálculo del flujo que atraviesa la espira es inmediato

$$\phi_m = \int_{\text{superficie espira}} \vec{B}\cdot d\vec{S} = \begin{cases} a \times (0.024\,t) \times B & 0 \le t \le t_1\,, \\ a \times 0.10 \times B & t_1 \le t \le t_2\,, \\ a \times \Big(0.10 - 0.024(t-t_2)\Big) \times B & t_2 \le t \le t_3\,, \\ 0 & t \ge t \ge t_3\,. \end{cases}$$

La f.e.m. inducida en la espira por el movimiento de ésta es por tanto

$$\mathcal{E} = R\,i_{\text{ind}} = -\frac{d\phi_m}{dt} = \begin{cases} -a \times 0.024 \times B & 0 \le t \le t_1\,, \\ 0 & t_1 \le t \le t_2\,, \\ +a \times 0.024 \times B & t_2 \le t \le t_3\,, \\ 0 & t \ge t \ge t_3\,. \end{cases} \tag{11}$$

con R=2.5 ohmios la resistencia de la espira e i_{ind} la corriente inducida en ella.

P.49 La corriente en el circuito de la izquierda circula en sentido horario, del polo positivo al polo negativo de la batería. Esta corriente crea un campo magnético que va hacia fuera de la página en los puntos dentro de la superficie delimitada por la espira derecha. Si ahora la corriente de la izquierda disminuye repentinamente, disminuye también el campo magnético que atraviesa la espira derecha. Como respuesta, en la espira derecha se induce una corriente que al circular por tal espira intenta reponer el número de líneas de campo magnético que han disminuido, esto es, la corriente inducida en la derecha irá en sentido antihorario, porque es en este sentido que el campo creado por una espira en su centro va hacia fuera de la página.

P.50 El campo creado por un conductor rectilíneo infinito a una distancia en perpendicular r es igual a $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$ con dirección circulando alrededor del conductor y siendo I la corriente que circula por el conductor: esto se obtiene o bien por integración directa de la Ley de Biot-Savart o bien aplicando la Ley de Ampére sobre un camino circular entorno al conductor. Por tanto, la fuerza que actúa sobre una carga móvil q que se mueve con una velocidad v paralela al conductor infinito a una distancia r es

$$F_{\text{Lorentz}} = qv\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,,$$

con dirección horizontal hacia la izquierda. Como en el problema 46, las cargas desplazadas en el conductor por la fuerza de Lorentz terminan creando un campo eléctrico de valor $E = \dfrac{v\mu_0 I}{2\pi r}$ que compensa la fuerza de Lorentz, y así, tal campo lleva dirección horizontal hacia la derecha (en el sentido en que crece la distancia r). La diferencia de potencial, debida al campo E, que aparece entre los extremos de la varilla móvil es

$$\Delta V = -\int_{r=d}^{r=d+l} \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\int_{r=d}^{r=d+l} \frac{v\mu_0 I}{2\pi r}dr = -\frac{v\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(\frac{d+l}{d}\right). \tag{12}$$

P.52 y **P.53** El campo creado por el conductor rectilíneo infinito a una distancia en perpendicular x es igual a $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi x}$ entrando hacia dentro de la página para los puntos de la espira de dimensionesaxb, con a=0.05 m y b=0.1 m. Consideremos en la espira derecha una tira vertical situada a una distancia x del conductor rectilíneo, tira de anchura dx y altura b: el flujo que atraviesa esta tira es

$$d\phi_m = -\frac{\mu_0 I}{2\pi x}\,bdx\,,$$

donde el signo menos viene de que el vector superficie de la espira va hacia fuera, en sentido contrario al campo magnético. El flujo que atraviesa toda la espira es por tanto

$$\phi_m = \int_{x=d}^{x=d+l} -\frac{\mu_0 I}{2\pi x}\,bdx = -\frac{\mu_0 I b}{2\pi}\ln\left(\frac{d+l}{d}\right)\,, \tag{13}$$

con d=0.02 m.

Para el problema 53, la distancia d a la que está el lado izquierdo de la espira crece linealmente con el tiempo ya que la velocidad v con la que se aleja es constante. Luego basta con sustituir en la ecuación (13) d por d+vt

$$\phi_m = -\frac{\mu_0 I b}{2\pi}\ln\left(\frac{d+vt+l}{d+vt}\right)\,.$$

Puesto que ahora el flujo que atraviesa la espira varía con el tiempo, el resultado va a ser que se induce en la espira una f.e.m. igual a

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_m}{dt} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi}\left(\frac{v}{d+vt+l} - \frac{v}{d+vt}\right)\,. \tag{14}$$

El sentido de la corriente inducida en la espira derecha es fácil de obtener. Al alejarse la espira disminuye el campo magnético que la cruza hacia dentro de la página, y por tanto la corriente inducida tiende a compensar esta pérdida: la corriente va a circular en sentido horario porque éste es el sentido que crea en el interior de la superficie de la espira un campo magnético hacia dentro de la página. Por como se ha deducido la f.e.m. (14) (en tiras verticales de anchura infinitesimal) ésta es inducida en los segmentos verticales, paralelos al conductor rectilíneo infinito: son estos segmentos los que al moverse barren una superficie en la que varía el flujo magnético. Los segmentos horizontales, por otra parte, no barren ninguna superficie, al menos mientras la espira sólo se desplace horizontalmente.

Ahora vamos a obtener el resultado (14) pero calculando directamente la f.e.m. inducida en cada uno de los segmentos de la espira rectangular: la técnica es la del problema 50. Empecemos por el segmento vertical más próximo al conductor infinito, conductor que crea un campo magnético $\dfrac{\mu_0 I}{2\pi(d+vt)}$ hacia adentro en los puntos del segmento. Puesto que las cargas de este segmento conductor se mueven hacia la derecha con velocidad v, sobre ellas actúa una fuerza de Lorentz $F_{\text{Lorentz}} = q\dfrac{v\mu_0 I}{2\pi(d+vt)}$ hacia arriba, que al desplazar a las cargas termina creando un campo eléctrico $E = \dfrac{v\mu_0 I}{2\pi(d+vt)}$ a lo largo del segmento hacia abajo. Tomemos un vector $d\vec{l}$ tangente a la espira rectangular y dirigido en sentido horario: en el segmento vertical que estamos considerando, $d\vec{l}$ va hacia arriba y por tanto

$$\mathcal{E}_{\text{vertical izquierdo}} = \int \underbrace{\vec{E}\cdot d\vec{l}}_{-E\,dy} = \int_{y=0}^{y=b} (-E)\,dy = -\frac{v\mu_0 I b}{2\pi(d+vt)}\,.$$

Lo mismo aplicado al otro segmento vertical, donde $d\vec{l}$ va hacia abajo, en el mismo sentido que el campo eléctrico $E = \dfrac{v\mu_0 I}{2\pi(d+l+vt)}$, nos da

$$\mathcal{E}_{\text{vertical derecho}} = \int_{y=0}^{y=b} E\,dy = \frac{v\mu_0 I b}{2\pi(d+l+vt)}\,.$$

Ahora consideremos uno de los dos segmentos horizontales: en ellos la fuerza de Lorentz sigue siendo hacia arriba y por tanto el desplazamiento de cargas en en dirección vertical. El campo eléctrico que se pudiera inducir iría en dirección *vertical* hacia abajo, pero puesto que en estos segmentos el vector $d\vec{l}$ tangente a la espira va en dirección *horizontal* entonces al calcular la f.e.m. tendríamos la integral de $\vec{E}\cdot d\vec{l}$, producto escalar que es cero. Por tanto la f.e.m. inducida en los cuatro segmentos es igual al resultado (14)

$$\mathcal{E} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi}\left(-\frac{v}{d+vt} + \frac{v}{d+l+vt} + 0\right)\,,$$

donde el cero es la contribución de los dos segmentos horizontales.

P.56 Una carga q (móvil ya que la varilla es conductora) situada a una distancia r del punto de giro lleva una velocidad lineal tangencial igual a $v = r\omega$ y puesto que la varilla se mueve dentro de una campo magnético que es perpendicular a ella, sobre la carga q actúa una fuerza (de Lorentz) igual a

$$F = qvB = qr\omega B\,, \tag{15}$$

con dirección hacia el centro de giro (es una fuerza centrípeta). Tal fuerza va a empezar a desplazar las cargas móviles de la varilla hasta que el campo creado por ellas compense la fuerza de Lorentz (ver problema 50). Este campo es igual a $r\omega B$ y va en dirección radial hacia afuera: la diferencia de potencial es entonces

$$\Delta V = -\int_{r=0}^{r=L} \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\int_{r=0}^{r=L} \omega B r dr = -\omega B\,\frac{L^2}{2}\,. \tag{16}$$

2 Problemas de aplicación de la Ley de Faraday (II): 48, 51

Ampliación. Sea la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} + C\,y = D\,, \tag{17}$$

donde C y D son constantes. La manera de obtener la función $y(t)$ que sea solución de tal ecuación es la siguiente: primero se hace un cambio de variable $z = y - \frac{D}{C}$, y puesto que D/C es contante, entonces se cumple que $\frac{dz}{dt} = \frac{dy}{dt}$. Con este cambio de variable, la ecuación diferencial queda

$$\frac{dz}{dt} + C\left(z + \frac{D}{C}\right) = D \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dt} = -C\,z \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{z} = -C\,dt\,,$$

o lo que es lo mismo

$$\ln\!\left(\frac{z}{z_0}\right) = \int_{z_0}^{z} \frac{dz'}{z'} = -\int_{t=0}^{t} C\,dt' = -C\,t \quad \Rightarrow \quad z = z_0\,e^{-Ct}\,,$$

con z_0 una constante a determinar a partir de las condiciones iniciales del problema. La solución $y(t)$ que estamos buscando es por tanto

$$y(t) = \frac{D}{C} + z_0\,e^{-Ct}\,. \tag{18}$$

Para los problemas en los que vamos a encontrar esta ecuación diferencial, $y(t)$ va a ser la velocidad y por tanto la ecuación diferencial (17) tiene el siguiente sentido físico: la derivada $\frac{dy}{dt}$ es la aceleración (igual a la fuerza total dividida por la masa), que de acuerdo con la ecuación diferencial, es igual a una constante menos un término proporcional a la velocidad. O sea, la fuerza total que está actuando sobre el cuerpo cuyo movimiento describe (17) es igual a un término constante (por ejemplo el peso) más otra fuerza que es proporcional a menos la velocidad, fuerza ésta que suele describir un rozamiento o amortiguamiento. De acuerdo con (18), la velocidad inicial del cuerpo es $\frac{D}{C} + z_0$ mientras que la velocidad límite que alcanzará para $t \to \infty$ es igual a D/C. Esta velocidad límite se obtiene de manera más directa a partir de la ecuación diferencial inicial: una vez el cuerpo alcance la condición límite, $y(t) = y_{\text{lim}}$, su velocidad es constante y no varía, por lo que la derivada $\frac{dy}{dt}$ es cero y a partir de (17) se obtiene

$$0 + C\, y_{\text{lim}} = D \quad \Rightarrow \quad y_{\text{lim}} = \frac{D}{C}\,.$$

Puesto que en la mayor parte de los casos la velocidad inicial es cero, $y(t{=}0){=}0$, la solución general de la ecuación diferencial que estamos estudiando es

$$y(t=0) = 0 = \frac{D}{C} + z_0 \quad \Rightarrow \quad z_0 = -\frac{D}{C}\,,$$

$$y(t) = \frac{D}{C}\left(1 - e^{-Ct}\right)\,. \tag{19}$$

Un caso en donde ya te habrás encontrado con esta ecuación diferencial, y con el caso de una velocidad límite, es en la práctica de la gota de Millikan.

P.48 Inicialmente por la espira cerrada que queda a la derecha circula una corriente $i_0 = \frac{\mathcal{E}}{R_{\text{total}}} = \frac{\mathcal{E}}{R}$ donde R es la resistencia de la barra vertical (los dos conductores horizontales paralelos no tienen prácticamente resistencia), siendo la dirección de esta corriente hacia abajo en la barra vertical. Al moverse esta barra vertical, el flujo que atraviesa la espira varía con el tiempo y por tanto, a parte de la intensidad inicial, se inducirá otra intensidad más debida a la Ley de Faraday. En un intervalo infinitesimal de tiempo dt el área atravesada por el campo magnético disminuye en $vdt\,L$: por tanto lo que varía el flujo magnético que atraviesa la espira es $d\phi_m = -\Big(-vdt\,L\Big)\,B$, donde el primer signo menos en $d\phi_m$ viene de que el vector de superficie de la espira va hacia fuera de la hoja (aplicando la regla de la mano derecha cuando se recorre la espira en la dirección en la que circula inicialmente la corriente) mientras que el vector campo mágnetico va hacia dentro. Por lo tanto, la corriente total que circula por la espira es igual a la suma de la corriente inicial más la corriente inducida

$$Ri_{\text{ind}} = \mathcal{E}_{\text{ind}} = -\frac{d\phi_m}{dt} = -vLB\,,$$

$$i_{\text{total}} = i_0 + i_{\text{ind}} = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{vLB}{R}\,. \tag{20}$$

que es la corriente que también circula hacia abajo por la barra vertical. De esta forma, las cargas móviles de la barra llevan: una velocidad v hacia la derecha que provoca una fuerza de Lorentz paralela a la barra vertical; y otra velocidad hacia abajo por la corriente i_{total} que origina una fuerza de Lorentz $d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}$

$$F_{\text{Lorentz, horizontal}} = i_{\text{total}} LB\,, \tag{21}$$

hacia la derecha. La primera fuerza de Lorentz, paralela a la barra vertical, va llevando cargas a los extremos de la barra (ver problema 46) hasta que estas cargas desplazadas crean un campo eléctrico que compensa la fuerza de Lorentz que las estaba desplazando: por ello, al cabo de un pequeo intervalo de tiempo, la única fuerza de Lorentz que queda es la ecuación (21) (debida al movimiento de las cargas a la largo de la barra vertical) que será igual a la masa por la aceleración de la barra

$$\sum F = \underbrace{i_{\text{total}} LB}_{\frac{\mathcal{E}LB}{R} - \frac{vL^2B^2}{R}} = m\frac{dv}{dt}\,,$$

o bien

$$\frac{dv}{dt} + \frac{L^2B^2}{mR}\,v = \frac{\mathcal{E}LB}{mR}\,. \tag{22}$$

La solución de esta ecuación diferencial ya ha sido discutida en la ampliación, con las sustituciones $\begin{cases} C & \rightarrow & \frac{L^2B^2}{mR} \\ D & \rightarrow & \frac{\mathcal{E}LB}{mR} \end{cases}$. Puesto que la velocidad inicial de la barra es cero, la velocidad en cualquier instante de tiempo viene dada por la solución (19)

$$v(t) = \frac{\mathcal{E}}{LB}\left(1 - e^{-\frac{L^2B^2}{mR}\,t}\right)\,. \tag{23}$$

Y la velocidad límite, es decir, cuando la velocidad ya no varía más y permanece constante, se puede deducir inmediatamente de (22)

$$0 + \frac{L^2B^2}{mR}\,v_{\text{lim}} = \frac{\mathcal{E}LB}{mR} \quad\Rightarrow\quad v_{\text{lim}} = \frac{\mathcal{E}}{LB}\,, \tag{24}$$

que es el límite $t \to \infty$ del resultado (23). Para tal velocidad límite la intensidad total (20) que circula por la espira cerrada que forma la barra con los dos concutores horizontales es

$$i_{\text{total}} = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{\mathcal{E}}{LB}\frac{LB}{R} = 0\,, \tag{25}$$

lo que es lógico, ya que de haber todavía corriente, habría todavía una fuerza de Lorentz hacia la derecha que modificaría la velocidad en este sentido de la barra.

P.51 Como en el problema anterior, al moverse hacia abajo la barra conductora sobre los raíles (raíles que se suponen están conectados entre sí en la parte de abajo), disminuye el número de líneas del campo magnético que atraviesa la superficie de la espira formada por la barra móvil y los raíles según

$$d\phi_m = -vdt\,LB\,\cos\theta\,,$$

donde el coseno aparece ya que ahora la espira no es atravesada perpendicularmente por el campo magnético; v es la velocidad con la que se mueve hacia abajo la barra móvil sobre los raíles. La variación del flujo magnético en la espira que estamos considerando induce una corriente en la barra móvil igual a

$$i_{\text{ind}} = -\frac{1}{R}\frac{d\phi_m}{dt} = vLB\cos\theta\,,$$

que circula en sentido antihorario (viendo la barra móvil y los raíles desde arraiba). Esto a su vez origina una fuerza de Lorentz en dirección horizontal hacia atrás igual a

$$F_{\text{Lorentz, horizontal}} = i_{\text{ind}}LB = v\frac{L^2B^2\cos\theta}{R}\,. \tag{26}$$

Viendo los raíles paralelos de perfil (que forman un ángulo θ con la horizontal), tenemos que sobre la sección de la barra conductora móvil actúan las siguientes fuerzas:

- Su peso mg en vertical hacia abajo, con una componente $mg\cos\theta$ en perpendicular a los raíles y hacia abajo, y otra componente $mg\,\text{sen}\,\theta$ a lo largo de los raíles hacia adelante.

- La normal que hacen los raíles, que como su nombre indica es perpendicular a los raíles y está dirigida hacia arriba.

- La fuerza de Lorentz (26) en dirección horizontal, con una componente $F_{\text{Lor., hor.}}\,\text{sen}\,\theta$ en perpendicular a los raíles y dirigida hacia abajo, y otra componente

$$F_{||} = F_{\text{Lorentz, horizontal}}\cos\theta = v\frac{L^2B^2\cos^2\theta}{R}\,, \tag{27}$$

  que es paralela a los raíles y apunta hacia atrás. Nota que otra vez nos aparece una fuerza proporcional a la velocidad.

El movimiento a lo largo de los raíles viene descrito por la siguiente ecuación

$$mg\,\text{sen}\,\theta - F_{||} = m\frac{dv}{dt}\,,$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{L^2B^2\cos^2\theta}{mR}v = g\,\text{sen}\,\theta\,. \tag{28}$$

La velocidad límite se calcula como en la ecuación (24): cuando se alcanza esta velocidad límite, la velocidad ya no varía por lo que

$$0 + \frac{L^2B^2\cos^2\theta}{mR}v_{\text{lim}} = g\,\text{sen}\,\theta \quad\Rightarrow\quad v_{\text{lim}} = \frac{Rmg\,\text{sen}\,\theta}{L^2B^2\cos^2\theta}\,. \tag{29}$$

Puesto que la barra móvil parte del reposo, su velocidad en cualquier instante de tiempo t viene dada por la solución (19) con las sustituciones $\begin{cases} C \;\to\; \dfrac{L^2B^2\cos^2\theta}{mR} \\ D \;\to\; g\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$

$$v(t) = \frac{Rmg\,\text{sen}\,\theta}{L^2B^2\cos^2\theta}\left(1 - e^{-\frac{L^2B^2\cos^2\theta}{mR}t}\right)\,.$$

3 Problemas de autoinducciones: 54-55

$$\boxed{\phi_{m,\,\text{autoinducido}} = L\,i}$$

P.54 Por la definición de autoinducción, el flujo magnético creado por la bobina y que atraviesa el área dentro de la bobina es igual a

$$\phi_{m,\,\text{autoinducido}} = LI = LI_0 \,\text{sen}\,(2\pi f t)\,,$$

con lo que la f.e.m. inducida por la bobina en si misma al variar la corriente que circula por ella es igual a

$$\mathcal{E}_{\text{autoinducida}} = -\frac{d\phi_{m,\,\text{auto}}}{dt} = -2\pi L I_0 f \cos(2\pi f t)\,. \tag{30}$$

P.55 Puesto que el radio r=0.01 m del solenoide finito es mucho más pequeño que su longitud l=0.25 m, podemos considerarlo aproximadamente como un solenoide infinito. El campo magnético dentro de un solenoide infinito es uniforme e igual a $B = \mu_0 n I$ con n el número de espiras por unidad de longitud n=N/l. Puesto que el campo magnético es constante, el flujo que atraviesa el solenoide se calcula directamente

$$\phi_m = N\pi r^2\,\mu_0 n I\,, \tag{31}$$

y su autoinducción

$$L = \frac{N^2\pi r^2\mu_0}{l}\,. \tag{32}$$

P.57 La densidad de energía eléctrica es por definición $\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}$, que para el vacío se convierte en $\frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2$ ya que en el vacío se cumple $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$. La densidad de energía magnética por otro lado se define como $\frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}$, que en el vacío se puede escribir como $\frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2$. Si $\vec{E} = c\,\vec{B}$ entonces

$$\text{dens. e. eléctrica} = \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2 = \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\vec{B}^2 = \text{dens. e. magnética}\,. \tag{33}$$

4 Soluciones completas en formato PDF

Descarga de las soluciones aquí: apretando la tecla derecha del ratón sobre el enlace subrayado, elegir “Guardar enlace como” (Netscape) o “Guardar objetivo como” (Explorer).

Para usuarios de Linux, el archivo se puede abrir con el programa GhostView: escribir **gv prob_emo2.pdf &** o bien **kghostview prob_emo2.pdf &** en una consola de texto.

Para usuarios de Windows, el archivo se puede abrir con el programa AcrobatReader.