ENCUENTROS DE ANÁLISIS REAL Y COMPLEJO

Ezcaray (La Rioja), 28 de abril – 1 de mayo de 1994

INTRODUCCIÓN

Durante los días comprendidos entre el 28 de abril y el 1 de mayo de 1994 se celebraron en el Albergue de la Real Fábrica de Ezcaray (La Rioja), organizados por el Departamento de Matemáticas y Computación de la Universidad de La Rioja, los primeros **Encuentros de Análisis Real y Complejo**, en los que participaron reconocidos analistas de varias universidades españolas y profesores invitados de universidades extranjeras, así como estudiantes de doctorado (de análisis matemático) de diferentes universidades.

Dicha reunión tuvo por objeto presentar el estado actual de la investigación en España en análisis armónico y variable compleja, discutir sobre las diferentes líneas de investigación, crear una Secretaría para la difusión de prepublicaciones e información, y poner en contacto a los estudiantes de doctorado.

COMITÉ ORGANIZADOR

Joaquim Bruna (Universidad Autónoma de Barcelona)

José Luis Fernández (Universidad Autónoma de Madrid)

José J. Guadalupe (Universidad de La Rioja)

Fernando Soria (Universidad Autónoma de Madrid)

PROGRAMA

- **Jueves tarde:**

  Milne Anderson, "Tangentes a curvas y parametrización diádica". (4'30 h.)

  Ana Peña, "Inclusión del cubo ℓ_∞^n en las clases de Schatten". (6 h.)

  Joan Mateu, "Aproximación en L^p por soluciones de ecuaciones elípticas". (7 h.)

- **Viernes mañana:**

  Mats Andersson, "The H^p-corona problem in several variables". (9'30 h.)

  Ana Vargas, "Desigualdades con peso de tipo débil $(1,1)$ para operaciones con núcleos no suaves". (10'30 h.)

  Joaquim Ortega, Jr., "Soluciones en L^p de la ecuación $\partial\overline{\partial}u = \Theta$ en el bidisco". (12 h.)

- **Sábado mañana:**

  Antonio Córdoba, "Transiciones de fase". (9'30 h.)

  Juan J. Donaire, "Singularidades evitables para la clase de Zygmund analítica". (10'30 h.)

  Mavi Melian, "Comportamiento radial de funciones holomorfas". (12 h.)

- **Sábado tarde:**

  Joaquim Martín, "Interpolación de operadores sobre funciones decrecientes". (3'30 h.)

  Fernando Chamizo, "El problema de la esfera". (4'30 h.)

  Joan Fàbrega, "Espacios de norma mixta e interpolación". (6 h.)

- **Domingo mañana:**

  Carlos Pérez, "Comportamiento de los conmutadores de integrales singulares en los espacios extremos". (9 h.)

  José Luis Ansorena, "Un teorema de dualidad para BMO(ρ)". (10 h.)

RESUMEN DE COMUNICACIONES

TANGENTS TO CURVES AND A DYADIC PARAMETRIZATION

Milne Anderson

If Γ is a non-rectificable curve, such as the von Koch snowflake, a "dyadic" parametrization can be introduced. Conditions can then be given, in terms of this parametrization, which ensure that Γ has a tangent at Λ_1-almost all points. At all such points, Λ_1 measure and harmonic measure are mutually absolutelly continuous. The proof involves construction of a suitable martingale and use of Gundy's version of the Marcinkiewicz-Zygmund martingale convergence theorem.

INCLUSIÓN DEL CUBO ℓ_∞^n EN LAS CLASES DE SCHATTEN

Ana Peña

El problema a tratar es la inclusión $(1+\varepsilon)$ del cubo ℓ_∞ de cardinal finito en un espacio normado de dimensión finita. Extendemos los resultados conocidos a espacios que no tienen estructura simétrica ni incondicional, más concretamente al espacio de operadores ideales C_E^n donde E es un espacio normado 1-simétrico de dimensión n. El resultado es el siguiente:

Teorema. *Dado $0 < \varepsilon < 1$, existe una constante $C > 0$ tal que, para todo N satisfaciendo $\log N \leq C\varepsilon^8 n^2$, podemos encontrar N puntos $T_1, \ldots, T_N$ en C_E^n satisfaciendo $1 - \varepsilon \leq \|T_i - T_j\|_{C_E^n} \leq 1$ para todo par $i \neq j$.*

Por un razonamiento volumétrico, se puede ver que la estimación obtenida es óptima asintóticamente hablando, es decir, conseguimos tantos puntos con distancia relativa casi constante como $\exp(\dim C_E^n)$. Los puntos de C_E^n son encontrados entre proyecciones ortogonales sobre subespacios de $\mathbb{R}^n$ de dimensión k los cuales tienen a su vez subespacios de dimensión $(1-\varepsilon)k$ casi-ortogonales a los anteriores. La demostración se basa en métodos probabilísticos, probando sólamente la existencia; no es por tanto constructiva.

APROXIMACIÓN EN L^p POR SOLUCIONES DE ECUACIONES ELÍPTICAS

Joan Mateu

En los años 70 y principios de los 80, diferentes autores consideraron el problema de caracterizar los conjuntos compactos K tales que toda función de $L^p(K)$ y armónica en el interior de K es aproximable en $L^p(K)$ por funciones armónicas en un entorno del compacto K. Obtuvieron una condición capacitaria necesaria y dos condiciones capacitarias suficientes. En esta charla mostraremos con un ejemplo que la condición necesaria **no** es suficiente para que el compacto K tenga la propiedad antes mencionada.

DESIGUALDADES CON PESO DE TIPO DÉBIL $(1,1)$ PARA OPERACIONES CON NÚCLEOS NO SUAVES

Ana Vargas

Esta charla trata de varios operadores cuyos núcleos no cumplen las condiciones de regularidad habituales. Son el multiplicador de Bochner-Riesz de índice crítico y los operadores maximales e integrales singulares con núcleos homogéneos no suaves. Es sabido que son de tipo débil $(1,1)$ respecto a la medida de Lebesgue (los dos últimos bajo ciertas condiciones). Veremos también que son de tipo débil $(1,1)$ respecto a pares de pesos de la forma $(\omega, [\widetilde{M}(\omega^\beta)]^{1/\beta})$, donde $\widetilde{M}$ será el operador maximal de Hardy-Littlewood, para el multiplicador de Bochner-Riesz, y una composición de este mismo operador con el operador maximal con núcleo no suave, para los otros dos.

SOLUCIONES EN L^p DE LA ECUACIÓN $\partial\overline{\partial}u = \Theta$ EN EL BIDISCO

Joaquim Ortega, Jr.

En el estudio de las variedades de ceros de funciones holomorfas aparece de forma natural la ecuación $\partial\overline{\partial}u = \Theta$. Nosotros estudiamos y caracterizamos las corrientes Θ de forma que existe una solución $u \in L^p$ en el bidisco. El correspondiente resultado sobre variedades de ceros resuelve un problema planteado originalmente por Beller (en dimensión 1) en 1975.

TRANSICIONES DE FASE

Antonio Córdoba

La teoría de superficies mínimas y de transiciones de fase lleva a la consideración de los funcionales

$$J_\varepsilon(u) = \int_\Omega \left(\varepsilon\, |\nabla u|^2 + F(u)\right) dx$$

donde $\varepsilon > 0$ es un paraámetro pequeño, y $F \geq 0$ tiene un número finito de mínimos locales.

Se consideran minimizantes locales u_ε y soluciones del problema límite obtenidas como límites de esos minimizantes locales.

Teorema. *Los conjuntos de nivel de los minimizantes u_ε convergen uniformemente a superficies mínimas en el interior de Ω (en compactos de Ω). Es decir, si $u = \lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon$ en $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, entonces u consta de varios estados separados por interfases que son superficies mínimas a las que convergen uniformemente los conjuntos de nivel de los minimizantes u_ε.*

SINGULARIDADES EVITABLES PARA LA CLASE DE ZYGMUND ANALÍTICA

Juan J. Donaire

El problema que abordamos es el estudio de las singularidades evitables para las funciones analíticas de la clase de Zygmund. Utilizando las técnicas probabilísticas de Makarov, demostramos que, si un compacto del plano tiene una cierta medida de Hausdorff nula, entonces es evitable y que este resultado es óptimo. Así mismo, probamos que es imposible dar una caracterización de estas singularidades en términos de medidas de Hausdorff.

COMPORTAMIENTO RADIAL DE FUNCIONES HOLOMORFAS

Mavi Melián

Sea $\mathcal{R}$ una superficie de Riemann no excepcional que no sea el disco punteado. Si f es una función holomorfa del disco unidad, Δ, del plano complejo $\mathbb{C}$, en $\mathcal{R}$, entonces el conjunto de radios tales que su imagen por f permanece a distancia hiperbólica acotada desde $f(0)$ tiene dimensión de Hausdorff al menos $\delta(\mathcal{R})$. Aquí $\delta(\mathcal{R})$ denota el exponente de convergencia del grupo de cubrimiento de $\mathcal{R}$. Si $\mathcal{R} = \Omega$ es un dominio plano, la condición de que la curva $f(re^{i\theta})$ permanezca hiperbólicamente acotada significa que tal curva permanece a distancia euclídea positiva de la frontera topológica de Ω.

INTERPOLACIÓN DE OPERADORES SOBRE FUNCIONES DECRECIENTES

Joaquim Martín

El estudio de operadores que actúan sobre funciones decrecientes de diversos espacios de funciones se ha estudiado recientemente en diversos contextos. En relación con la teoría de interpolación de operadores, no existe ningún método general que permita identificar la clase interpolada del par de conos de las funciones decrecientes de dos retículos de Banach sobre la semirrecta aunque esté identificado el interpolado de esos retículos.

Un estudio del funcional K de Peetre permite mostrar como, en numerosos ejemplos, entre los que se incluyen todos los espacios invariantes por reordenación y una gama de retículos de funciones con pesos, la interpolación real para funciones decrecientes tiene un buen comportamiento.

EL PROBLEMA DE LA ESFERA

Fernando Chamizo

Combinando técnicas de anális armónico y de teoría de números, probamos que si $S(R)$ es la cantidad de puntos de coordenadas enteras en el interior de una esfera de radio R entonces, para todo $\varepsilon > 0$,

$$S(R) = \frac{4\pi}{3}R^3 + O\big(R^{(\frac{29}{22}+\varepsilon)}\big).$$

ESPACIOS DE NORMA-MIXTA E INTERPOLACIÓN

Joan Fàbrega

Se demuestra que los espacios de interpolación obtenidos al aplicar el método de interpolación real a espacios de Bergman-Sobolev con pesos, coinciden con los conocidos espacios de norma-mixta. Se dan aplicaciones de este resultado y, en particular, se demuestra que estos espacios coinciden con los espacios de Besov de funciones holomorfas.

COMPORTAMIENTO DE LOS CONMUTADORES DE INTEGRALES SINGULARES EN LOS ESPACIOS EXTREMOS

Carlos Pérez

Sea b una función localmente integrable en $\mathbb{R}^n$ y sea T una integral singular de Calderón-Zygmund. Consideremos el conmutador $[b,T]f = bT(f) - T(bf)$. Es bien conocido que estos operadores están acotados en $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, asumiendo que b es una función de BMO. El propósito de esta charla es discutir cómo se comportan estos operadores en espacios extremos. Estos operadores no son de tipo débil $(1,1)$, pero sí satisfacen desigualdades del tipo $L \log L$. Tampoco envía $H^1(\mathbb{R}^n)$ en $L^1(\mathbb{R}^n)$, pero sí están acotados de $H^1_b(\mathbb{R}^n)$ en $L^1(\mathbb{R}^n)$. $H^1_b(\mathbb{R}^n)$ es un subespacio propio de $H^1(\mathbb{R}^n)$ definido con átomos que satisfacen una cancelación adicional a la habitual en términos del símbolo del operador b.

UN TEOREMA DE DUALIDAD PARA $\mathrm{BMO}(\rho)$

José Luis Ansorena

Utilizando la fórmula de Calderón, damos una caracterización de Littlewood-Paley del espacio $\mathrm{BMO}(\rho)$. Entonces, utilizamos esta caracterización para obtener un espacio cuyo dual es $\mathrm{BMO}(\rho)$. Por último, siguiendo las ideas de Frazier, Jawerth y Weiss, damos una descomposición atómica de ambos espacios.

RELACIÓN DE PARTICIPANTES

Manuel Alfaro (Universidad de Zaragoza)

Milne Anderson (Londres)

Mats Andersson (Universidad Autónoma de Barcelona)

José Luis Ansorena (Universidad de Zaragoza)

José Luis Arregui (Universidad de Zaragoza)

Esther Barrabés (Universidad de Barcelona)

Jesús Bastero (Universidad de Zaragoza)

Oscar Blasco (Universidad de Valencia)

Aline Bonami (Universidad de Orléans, Francia)

Santiago Boza (Universidad Politécnica de Cataluña)

Joaquim Bruna (Universidad Autónoma de Barcelona)

Josep María Burgués (Universidad Autónoma de Barcelona)

Alicia Cantón (Universidad Autónoma de Madrid)

Joan Josep Carmona (Universidad Autónoma de Barcelona)

María Jesús Carro (Universidad de Barcelona)

Joan Cerdà (Universidad de Barcelona)

Fernando Chamizo (Universidad Autónoma de Madrid)

Antonio Córdoba (Universidad Autónoma de Madrid)

Juan J. Donaire (Universidad Autónoma de Barcelona)

Javier Duoandikoetxea (Universidad del País Vasco)

Joan Fàbrega (Universidad de Barcelona)

José Luis Fernández (Universidad Autónoma de Madrid)

Daniel Girela (Universidad de Málaga)

Ana Granados (Universidad Autónoma de Madrid)

José J. Guadalupe (Universidad de La Rioja)

Jaume Gudayol (Universidad de Barcelona)

José Manuel Gutiérrez (Universidad de La Rioja)

Joaquim Martín (Universidad de Barcelona)

Joan Mateu (Universidad Politécnica de Cataluña)

Mavi Melián (Universidad Autónoma de Madrid)

Mark Melnikov (Universidad Autónoma de Barcelona)

Adela Moyúa (Universidad del País Vasco)

Joan Orobitg (Universidad Autónoma de Barcelona)

Joaquim Ortega (Universidad de Barcelona)

Joaquim Ortega, Jr. (Universidad Autónoma de Barcelona)

Daniel Pascuas (Universidad de Barcelona)

Ana Peña (Universidad de Zaragoza)

Carlos Pérez (Universidad Autónoma de Madrid)

Mario Pérez (Universidad de Zaragoza)

Domingo Pestana (Universidad Autónoma de Madrid)

José Antonio Raposo (Universidad de Barcelona)

Marisa Rezola (Universidad de Zaragoza)

José Manuel Rodríguez (Universidad Carlos III)

Francisco J. Ruiz (Universidad de Zaragoza)

Nicolai Shcherbina (Universidad Autónoma de Barcelona)

Fernando Soria (Universidad Autónoma de Madrid)

Javier Soria (Universidad de Barcelona)

Ana Vargas (Universidad Autónoma de Madrid)

Juan Luis Varona (Universidad de La Rioja)

Luis Vega (Universidad del País Vasco)

Joan Verdera (Universidad Autónoma de Barcelona)

Dimitri Yakubovich (Universidad Autónoma de Madrid)