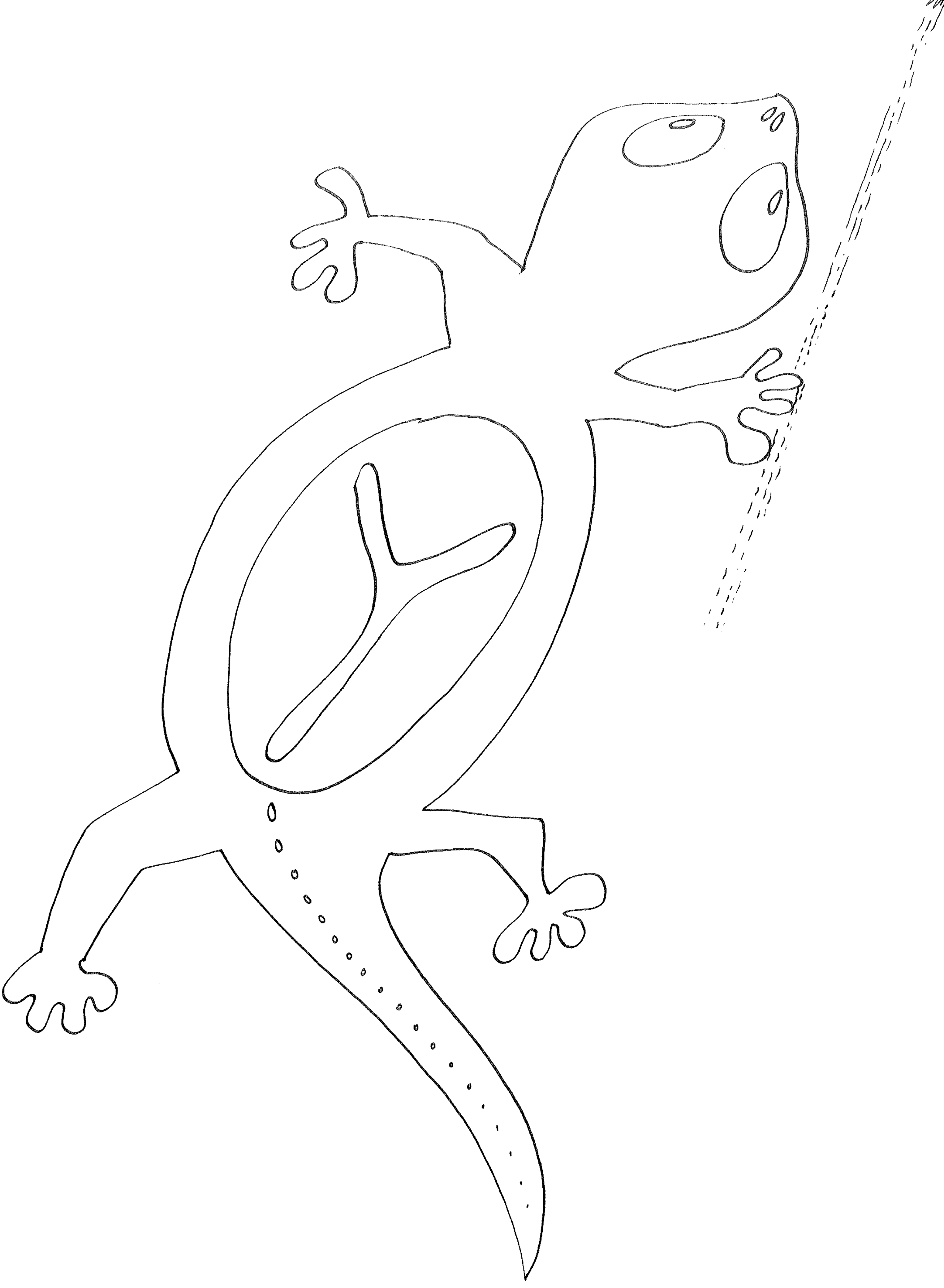
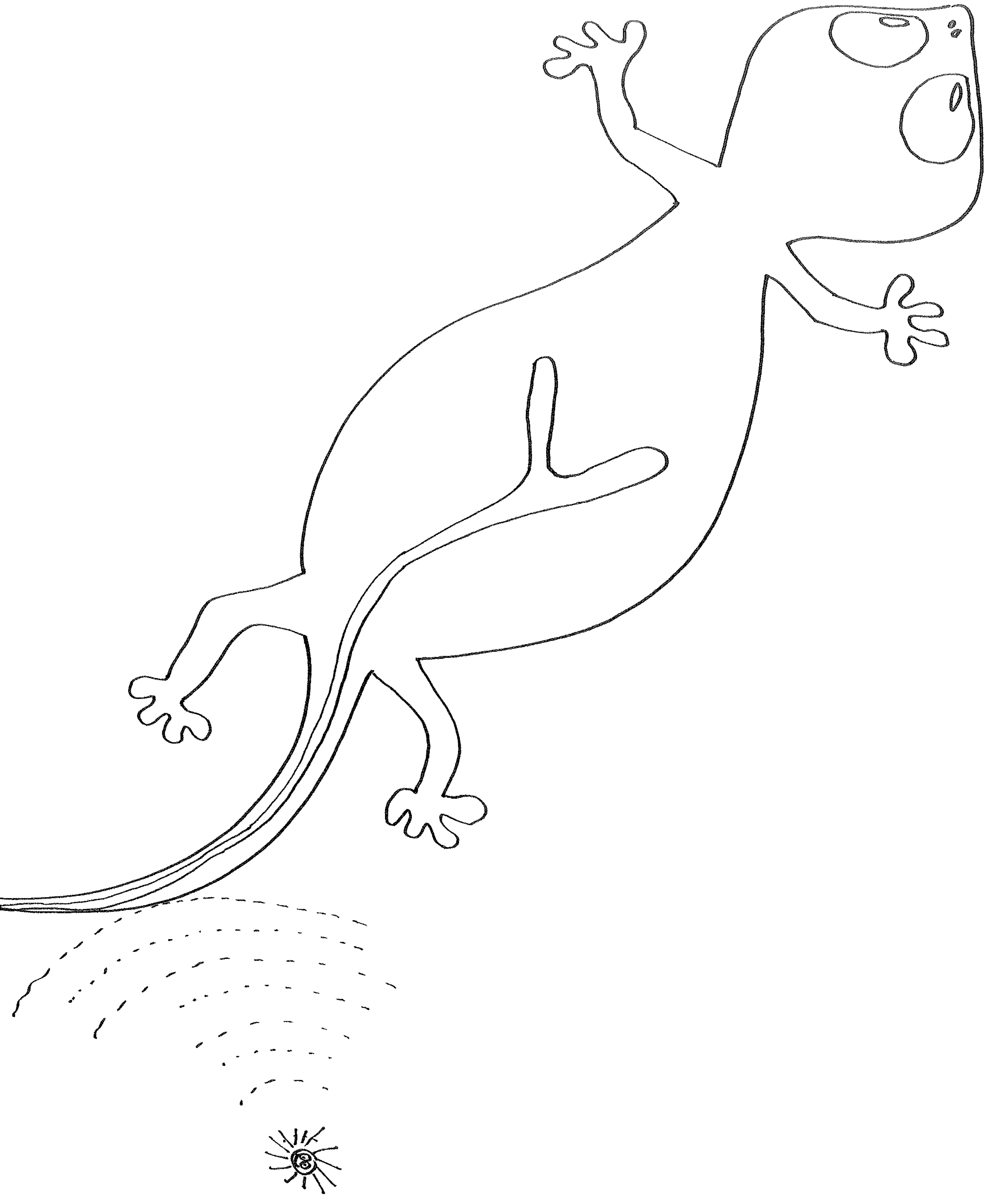




CAS HYPERSURFACE

$$V = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid f(x_1, \ldots, x_n) = 0 \}$$

$$f \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n]$$

Variétés polaires

(Cas compact : soleil à l'infini)

$$A = \begin{bmatrix} a_{01} & a_{02} & \cdots & a_{0n} \\ \vdots & & & \\ a_{n-i-1,1} & \text{———} & & a_{n-i-1,n} \\ a_{n-2,1} & a_{n-2,2} & \cdots & a_{n-2,n} \end{bmatrix}$$ une $(n-1) \times n$ matrice

A_i $(i = 1, \dots, n-1)$ la sous-matrice formée des lignes $0, 1, \dots, n-i-1$

Déf. La $i^{\text{ème}}$ variété polaire de V est : (OUVERTE)

$$\Delta_i(A) = \left\{ x \in V \setminus \operatorname{Sing} V \;\middle|\; T_x V \text{ non transverse à } \ker A_i \right\}$$

$$\operatorname{rang} \begin{array}{c} n \\ \boxed{\begin{array}{c} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \quad \cdots \quad \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \\ \hline A_i \end{array}} \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ n-i \end{array} \quad \text{non maximal}$$

Déf La $i^{\text{ème}}$ variété polaire (<u>FERMÉE</u>) de V est la clôture de Zariski de la précédente ouverte.

Cas particulier Si V est lisse, on en obtient des équations en adjoignant à $f = 0$ les mineurs d'ordre maximaux de la matrice ci-dessus :

$$
\begin{array}{cc}
\left[\begin{array}{c} g(f) \\ \hline \boxed{\quad A_i \quad} \end{array}\right] & \begin{array}{l} 1 \\ n-i \end{array} \\
n &
\end{array}
$$

[codimension attendue : $n - (n-i+1) + 1 = i$]

Le Passé Lisse

- $f \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$ équation régulière de l'hypersurface réelle

  $V = f^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^n$

  LISSE (compacte ou non)

- Degré de $f \leq d$

- Complexité d'évaluation de $f \leq L$

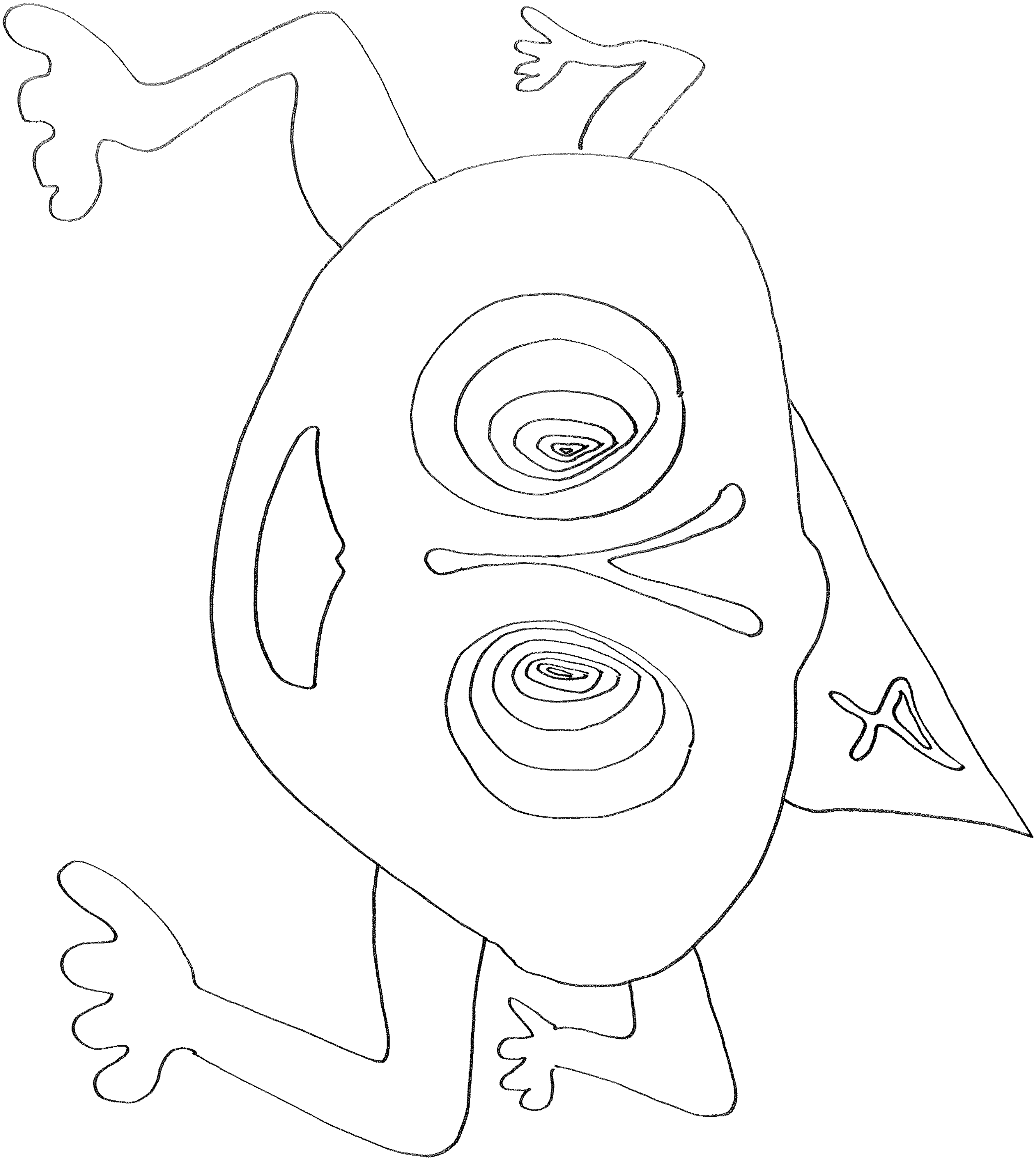
- Degré maximum des variétés polaires (ev. généralisées) $\delta \leq$ Nombre de Bézout d^n

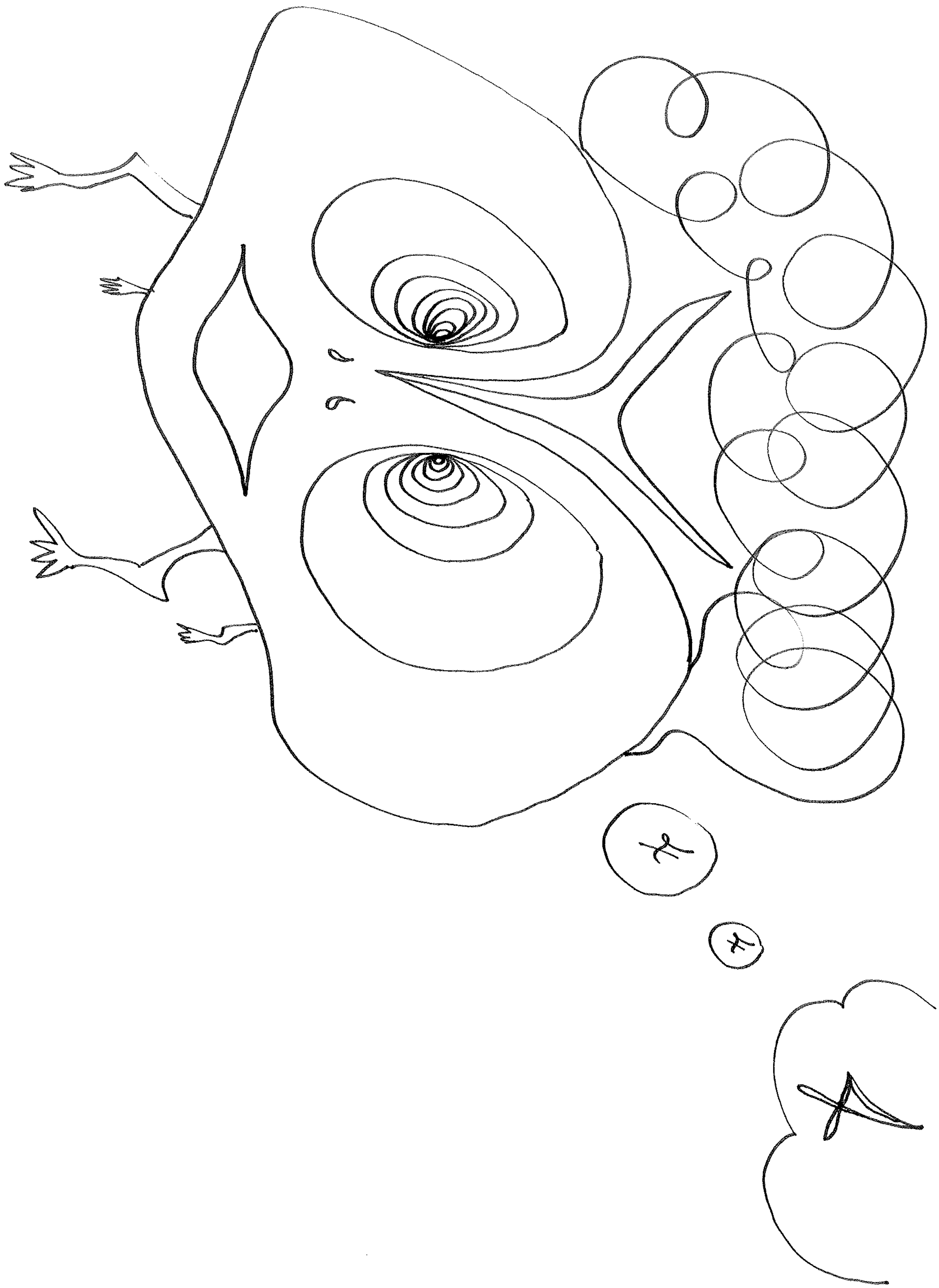
Y^4

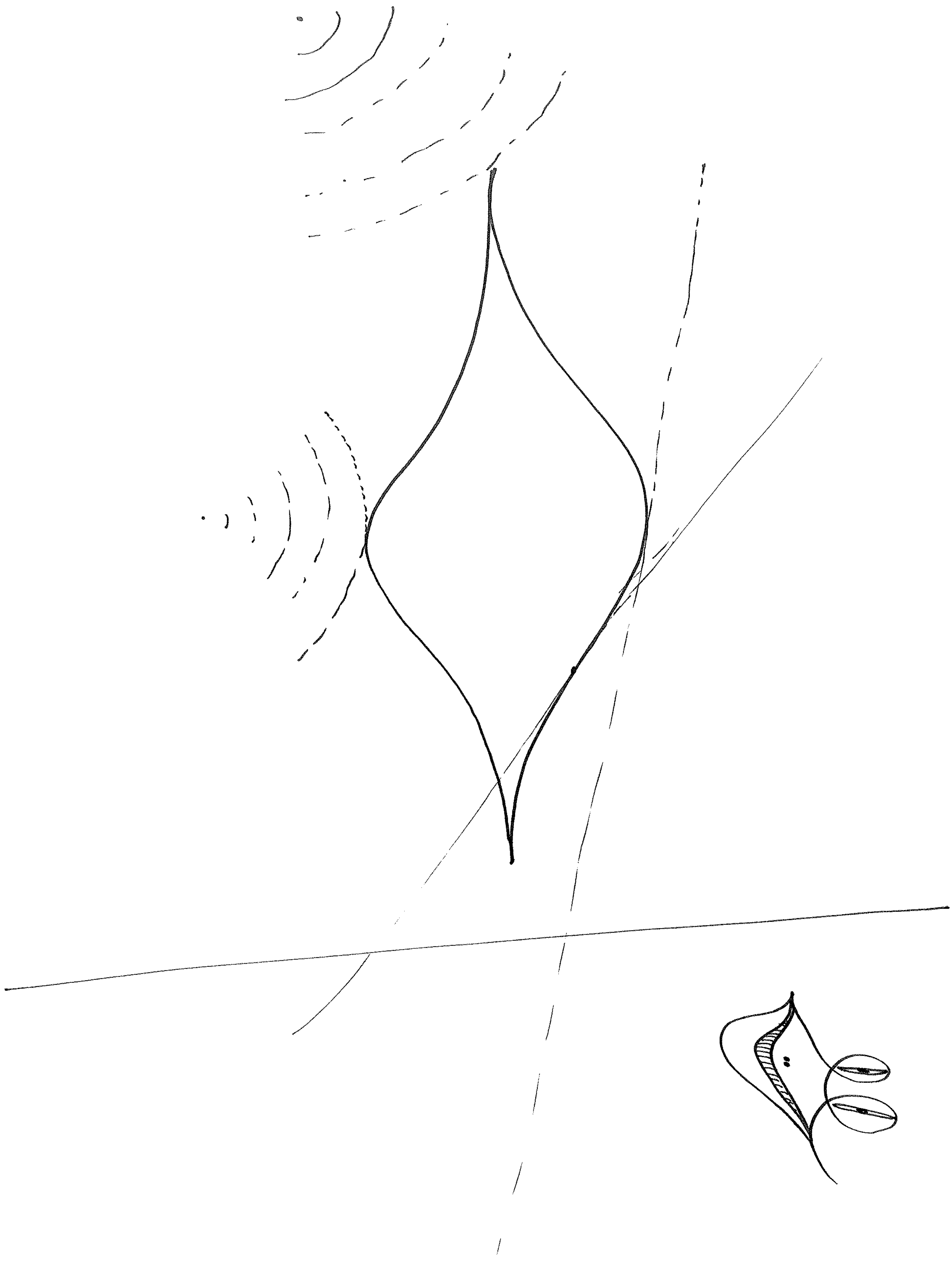
TROUVER UN POINT PAR COMPOSANTE CONNEXE DE V

Coût : $\mathcal{O}\left(L\,(nd\delta)^{O(1)}\right)$

- Théorème d'existence (précalcul)
- Version probabiliste
- Complexité extrinsèque LINÉAIRE en L
  POLYNOMIAL en le nombre de Bézout d^n







CAS SINGULIER

- les variétés polaires ne sont plus nécessairement <u>génériquement non vides</u> ; (OUVERTES)
- les variétés polaires (FERMÉES) ne bougent plus librement avec les directions définies par A : des (morceaux) du lieu singulier de V peuvent être fixes ;
- Plus d'équations déterminantielles !!

  (définissant des variétés év. plus grosses)

ÉCLATER ; DÉSINGULARISER

Désingularisation CANONIQUE de la variété déterminantielle :

$$n\ \underbrace{\left[\ {}^t\vartheta(f) \quad \underbrace{\boxed{\ {}^tA_i\ }}_{n-i}\ \right]}_{n-i+1} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu_0 \\ \vdots \\ \mu_{n-i-1} \end{bmatrix} = 0$$

$$(\lambda, \mu_0, \dots, \mu_{n-i-1}) \in \underline{\mathbb{P}}^{n-i}$$

Via cette variété d'incidence

ÉQUATIONS DE LA VARIÉTÉ D'INCIDENCE

$$\Sigma_i \begin{cases} f(x) = 0 \\ \lambda \dfrac{\partial f}{\partial x_\ell} + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-i-1} \mu_k \, a_{k\ell} = 0 \qquad \ell = 1, \dots, n \end{cases}$$

OÙ PEUT-ON LA FAIRE VIVRE ?

$$E_i = \left\{ (\lambda, A, \mu) \in \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^{\cancel{(n-i)n}}_{n(n-i)} \times \mathbb{A}^{n-i} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{rang } A = n-i \\ \& \ \mu \neq 0 \end{array} \right\}$$

Action naturelle de groupe

ACTION DE GROUPE

G, le groupe $GL(1) \times GL(n-i)$, agit naturellement sur E_i :

$$\begin{array}{ccc} G \times E_i & \longrightarrow & E_i \\ (t,\gamma),\ (\lambda, A, u) & \longmapsto & (t\lambda,\ A.\gamma,\ t(\gamma^{-1}.u)) \end{array}$$

$E_i /_{\sim G}$ est encore une variété (G est un " bon " groupe)

et la projection de Σ_i sur E_i est G - invariante _

CALCUL $\longrightarrow$ CARTE $\left\{ \begin{array}{l} \text{Grassmannienne} \\ \\ \text{Variété de drapeaux} \end{array} \right.$

$$\boxed{\text{DOMINER } V \setminus \mathrm{Sing}\, V \text{ par UN FERMÉ}}$$

$$\begin{array}{ccc} S_i \subset \mathbb{A}^n \times E_i/_{NG} & \longrightarrow & E_i/_N \\ \downarrow \qquad\quad \downarrow & & \\ V \setminus \mathrm{Sing}\, V \subset \mathbb{A}^n & & \end{array}$$

Ce fermé est LISSE ; nous sommes ramenés au cas précédent en introduisant ses variétés <u>polaires</u>,

$$\boxed{\text{BIPOLAIRES DE } V}$$

POINT DE VUE i FIXE

$$\text{Carte}\ \left\{ \begin{array}{l} {}^tA = \begin{array}{cc} n-i & \\ \left[\begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} \\ \hline * \end{array}\right] & \begin{array}{l} n \\ i \end{array} \\ n-i & \end{array} \quad \text{dim Grassmannienne } (i, n) \text{ ou } (n-i, n) \\ \\ \mu = (1, \mu_1, \ldots, \mu_{n-i-1}) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = 0 \\ \lambda \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + 1 = 0 \\ \cdots\cdots \\ \lambda \dfrac{\partial f}{\partial x_{n-i}} + \mu_{n-i-1} = 0 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} \lambda \dfrac{\partial f}{\partial x_\ell} + a_{\ell,0} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-i-1} \mu_k\, a_{\square} = 0 \\ \\ \ell = n-i+1, \ldots, n \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \lambda & t & a_{l,0} & \\ \left[\right. & \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n} & 0 & 0 & \text{———} & & \\ & & \frac{\partial f}{\partial x_1} & 0 & \text{———} & & \\ & * & \vdots & \boxed{\begin{smallmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{smallmatrix}} & 0 & & n-i-1 \\ & & \frac{\partial f}{\partial x_n} & * & \boxed{\begin{smallmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{smallmatrix}} & * & \left.\right] \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \text{———} \frac{\partial f}{\partial x_n} & 0 \\ * & \frac{\partial f}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad \underline{\text{rang maximal}}$$

$$\begin{array}{c} \Sigma_i \\ \downarrow \\ V \setminus \operatorname{Sing} V \end{array} \qquad \begin{array}{c} \Sigma_i(A) \\ \downarrow \\ \Delta_i(A) \end{array} \qquad A \text{ générique}$$

[Thom $\pitchfork$ faible]

COMPLEXITÉ

$$\begin{cases} f(x) = 0 \\ \lambda \dfrac{\partial f}{\partial x_\ell} + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-i-1} \mu_k \, a_{k\ell} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d' = d \\ n' \leq 2n \\ \delta' \leq d^{2n} \end{cases}$$

MÊME

CLASSE